

G E B R A



¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Juan Carlos Ramos Leyva

FONDO EDITORIAL
ARODO

4

Factorización - Fracciones Algebraicas

Teoría y Práctica

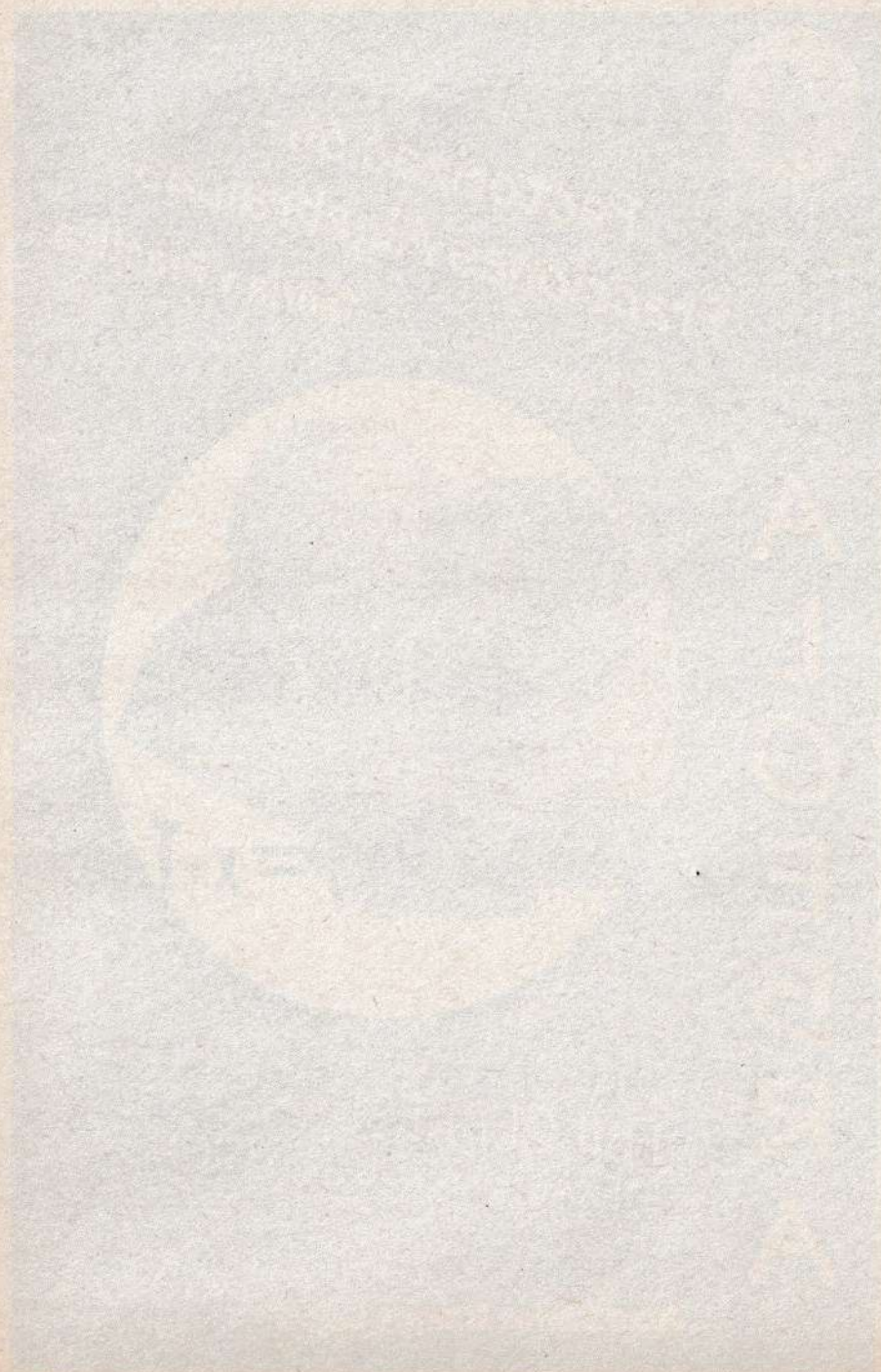
A
L



**Factorización -
Fracciones Algebraicas**
Teoría y Práctica

**¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION**

FONDO EDITORIAL
ARODO



PRESENTACIÓN

El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo con formado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y producción de textos acordes con las necesidades del sistema educativo. Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo de manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral.

Continuando con la elaboración de nuestra colección con miras al ciclo académico 2013, en esta oportunidad presentamos el texto teórico - práctico denominado **TEMAS SELECTOS DE ÁLGEBRA**, desarrollado con la gran experiencia de nuestro grupo humano. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica, ya que abarca los temas y preguntas solicitadas según la currícula de los centros preuniversitarios de las universidades más importantes del país relacionados con el curso.

Esta obra es la continuación de nuestra serie de publicaciones, caracterizada por la calidad e innovación constatada en los miles de ingresantes que han tenido como apoyo nuestras colecciones, esperando los comentarios y sugerencias las cuales sabremos aceptar

La presente serie de boletines consta de una sección teórica, donde se muestra toda la teoría referente al capítulo o capítulos mostrados en el boletín, luego se determina una sección de 100 problemas resueltos por los autores clasificados por nivel de exigencia de menor a mayor dificultad, explicados de manera clara y sencilla que servirá tanto para alumnos que recién empiezan su camino a la universidad, como alumnos de nivel avanzado, dándole nuevas alternativas de solución, luego se cuenta con 100 problemas propuestos con sus respectivas claves para que el alumno mida su nivel de comprensión respecto al capítulo con problemas de igual exigencia que la sección anterior, por último se muestra una sección de exámenes de admisión del curso en mención, con soluciones explicadas de la mejor manera.

Fondo Editorial RODO
De: Walter Z. Benítez Nuñez.

FACTORIZACIÓN Y FRACCIONES ALGEBRAICAS



ÁLGEBRA - TEMA SELECTO 04, 1ra Edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, tampoco su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

DERECHOS RESERVADOS © 2012 por

FONDO EDITORIAL RODO

de Walter Z. Benitez Nuñez

Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña

LIMA 05, PERÚ ☎ 424-6350 📠 992-796104

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del
Perú N°: 2012 - 15307

SUPERVISIÓN ACADÉMICA

Equipo Pedagógico de la Editorial

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS

José Miguel Gallo Ballena

IMPRESO EN PERÚ PRINTED IN PERÚ

En Talleres Gráficos de GRÁFICA DANY de Daniel Alberto Quispe Salcedo
Jr. Rufino Torrico 371 Of. 15 - Lima 01

FACTORIZACIÓN Y MCD - MCM DE POLINOMIOS

FACTORIZACIÓN

DEFINICIÓN

Es el proceso mediante el cual un polinomio definido en un campo numérico se transforma como la multiplicación de dos o más nuevos polinomios definidos en el mismo campo numérico.

Ejemplo: $P \equiv A + B + C \rightarrow P \equiv D.E.F$

Donde P, D, E $\wedge$ F pertenecen al mismo campo numérico.

POLINOMIO SOBRE UN CAMPO

Un polinomio se encuentra definido sobre un campo numérico si sus coeficientes pertenecen al conjunto numérico asociado a dicho campo, veamos algunos ejemplos:

- $P(x) = x^4 - 3x^2 + 7$ está definido en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{Q}$
- $P(x) = x^2 + \sqrt{5}x + 4$ está definido en $\mathbb{R}$
- $P(x) = 5x^3 - x^2 + \frac{2i}{i} = \sqrt{-1}$ está definido en $\mathbb{C}$

FACTOR

Dado un polinomio se dice que un factor (o divisor) de este es cualquier polinomio contenido en él. La unidad es factor de cualquier polinomio

Ejemplo: Para el polinomio $P(x) \equiv x^3 - 2x \equiv x(x^2 - 2)$
x es un factor asimismo también lo es $(x^2 - 2)$

PROPIEDAD: Si B es un factor de A entonces la división $\frac{A}{B}$ es exacta.

FACTOR PRIMO

Es aquel polinomio de grado arbitrario que no admite factorización en su campo de acción, veamos algunos ejemplos:

➤ $P(x) \equiv x^2 - 2$ es un factor primo en $\mathbb{Q}$ pero no en $\mathbb{R}$, pues:

$$P(x) \equiv x^2 - 2 \equiv x^2 - \sqrt{2}^2 \equiv (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

➤ $F(x) \equiv x^2 + 1$ es un factor primo en $\mathbb{Q}$ pero no en $\mathbb{C}$, pues:

$$F(x) \equiv x^2 + 1 \equiv x^2 - i^2 \equiv (x + i)(x - i)$$



OBSERVACIÓN

En este fascículo consideraremos la factorización en $\mathbb{Q}$ y nos limitaremos a trabajar con polinomios de coeficientes enteros, pues es así como se considera en un examen de admisión.

NÚMERO DE FACTORES (# FACT) Y NÚMERO DE FACTORES PRIMOS (# F. P.) DE UN POLINOMIO

Sea P un polinomio totalmente factorizado, de modo que:

$$P = A^\alpha \cdot B^\beta \cdot C^\theta ; \alpha, \beta, \theta \in \mathbb{Z}^+$$

Luego se cumple:

- I) $N^\circ \text{ de factores} = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\theta + 1)$
 II) $N^\circ \text{ de Factores Primos} = \text{Cantidad de bases} = 3$

Observación:

Si $\alpha \geq 2$ entonces A es un factor primo de multiplicidad α

Si $\alpha = 1$ entonces A es un factor primo simple

Ejemplo:

Para el polinomio factorizado

$$P(x) \equiv x^3(x - 2)(x + 1)^2 \text{ tenemos:}$$

$N^\circ \text{ de factores primos} = 3$ cantidad de bases!

$$N^\circ \text{ de factores} = (3 + 1)(1 + 1)(2 + 1) = (4)(2)(3) = 24$$

x es un factor primo de multiplicidad 3

$(x - 2)$ es un factor primo simple

$(x + 1)$ es un factor primo de multiplicidad 2

MÉTODOS PARA FACTORIZAR POLINOMIOS

1. MÉTODO DEL FACTOR COMÚN

Consiste en buscar un término repetido en toda la expresión, las variables de dicho término se deberán extraer con su menor exponente.

Ejemplo: Para $P(x; y) \equiv x^4y^7 - x^6y^5 + x^3y^6$
 $P(x; y) \equiv x^3 \cdot y^5 \cdot (xy^2 - x^3 + y)$
 Factor común

2. MÉTODO DE LAS AGRUPACIONES

Consiste en formar grupos con los términos de la expresión dada con el objetivo de obtener una estructura repetida en toda la expresión, la cual deberá ser extraída por ser un factor común.

Ejemplo: Para: $P(x; y) \equiv x^2 + xy - x - y$
 $P(x; y) \equiv (x^2 + xy) + (-x - y)$
 $P(x; y) \equiv x \cdot (x + y) - (x + y)$
 $\therefore P(x; y) \equiv (x + y) \cdot (x - 1)$

3. MÉTODO DE LAS EQUIVALENCIAS

Consiste en la aplicación de ciertos productos notables.

Ejemplo: Para: $P(x; y) \equiv x^2 - 9y^2$
 $P(x; y) \equiv x^2 - (3y)^2$
 $\therefore P(x; y) \equiv (x + 3y) \cdot (x - 3y)$

4. MÉTODO DEL ASPA SIMPLE

Se utiliza para factorizar algunos trinomios de grado par, cuya forma general sea la siguiente.

$$P(x; y) \equiv ax^{2m} + bx^m y^n + cy^{2n}$$

ESQUEMA

$$ax^{2m} + bx^m y^n + cy^{2n} \equiv (a_1 x^m + c_1 y^n)(a_2 x^m + c_2 y^n)$$

Donde se verifica:

$$a_1x^m \cdot a_2x^m \equiv ax^{2m} \wedge c_1y^n \cdot c_2y^n \equiv cy^{2n}$$

$$a_1c_2x^m y^n + a_2c_1x^m y^n \equiv bx^m y^n$$

Ejemplos:

Para:

$$P(x) \equiv 6x^2 + 13x + 2$$

$$P(x) \equiv 6x^2 + 13x + 2$$

$$\begin{array}{rcl} 6x & & 1 \rightarrow x + \\ x & & 2 \rightarrow 12x \\ & & \hline & & 13x \end{array}$$

$$\therefore P(x) \equiv (6x + 1)(x + 2)$$

Para:

$$P(x; y) \equiv 2x^4 - 5x^2y^3 + 2y^6$$

$$P(x; y) \equiv 2x^4 - 5x^2y^3 + 2y^6$$

$$\begin{array}{rcl} 2x^2 & & -y^3 \rightarrow -x^2y^3 + \\ x^2 & & -2y^3 \rightarrow -4x^2y^3 \\ & & \hline & & -5x^2y^3 \end{array}$$

$$\therefore P(x; y) \equiv (2x^2 - y^3)(x^2 - 2y^3)$$

OBSERVACIÓN

A veces luego de aplicar el aspa simple es necesario culminar la factorización por algún otro método visto anteriormente.

Para:

$$P(x) \equiv x^4 - 5x^2 + 4$$

$$P(x) \equiv x^4 - 5x^2 + 4$$

$$\begin{array}{rcl} x^2 & & -4 \rightarrow -x^2 + \\ x^2 & & -1 \rightarrow -4x^2 \\ & & \hline & & -5x^2 \end{array}$$

$$P(x) \equiv (x^2 - 4)(x^2 - 1) \equiv \underbrace{(x^2 - 2^2)}_{\text{Diferencia de cuadrados}} \underbrace{(x^2 - 1^2)}_{\text{Diferencia de cuadrados}}$$

$$\therefore P(x) \equiv (x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 1)$$

5. MÉTODO DE LA REDUCCIÓN A DIFERENCIA DE CUADRADOS

Se utiliza para factorizar algunos trinomios de grado par que no admiten aspa simple. Este método consiste en sumar y restar un término conveniente al trinomio de modo que mediante agrupaciones se consiga una diferencia de cuadrados.

Para encontrar el término que se debe sumar y restar al trinomio dado, se consideran los siguientes pasos:

- 1° Se extrae raíz cuadrada a los términos extremos
- 2° Se multiplica los resultados obtenidos
- 3° Se duplica el resultado anterior
- 4° El término obtenido en el paso anterior se suma y se resta al trinomio dado

Ejemplos:

Para: $P(x) \equiv x^4 + 2x^2 + 9$

$$\begin{array}{cc} \sqrt{} & \sqrt{} \\ 1^\circ \text{ Paso:} & x^2 \qquad 3 \\ 2^\circ \text{ Paso:} & 3x^2 \\ 3^\circ \text{ Paso:} & 2(3x^2) = 6x^2 \\ 4^\circ \text{ Paso:} & P(x) \equiv x^4 + 2x^2 + 9 + 6x^2 - 6x^2 \\ & P(x) \equiv (x^4 + 6x^2 + 9) + (2x^2 - 6x^2) \\ & P(x) \equiv (x^4 + 6x^2 + 9) - 4x^2 \\ & P(x) \equiv (x^2 + 3)^2 - (2x)^2 \\ & P(x) \equiv (x^2 + 3 + 2x)(x^2 + 3 - 2x) \\ \therefore & P(x) \equiv (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3) \end{array}$$

Para: $P(x; y) \equiv 4x^4 + 3x^2y^2 + y^4$

$$\begin{array}{cc} \sqrt{} & \sqrt{} \\ 1^\circ \text{ Paso:} & 2x^2 \qquad y^2 \\ 2^\circ \text{ Paso:} & 2x^2y^2 \\ 3^\circ \text{ Paso:} & 4x^2y^2 \\ 4^\circ \text{ Paso:} & P(x; y) \equiv 4x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2 \\ & P(x; y) \equiv (4x^4 + 4x^2y^2 + y^4) + 3x^2y^2 - 4x^2y^2 \\ & P(x; y) \equiv (4x^4 + 4x^2y^2 + y^4) - x^2y^2 \\ & P(x; y) \equiv (2x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 \\ \therefore & P(x; y) \equiv (2x^2 + y^2 + xy)(2x^2 + y^2 - xy) \end{array}$$

6. MÉTODO DEL ASPA MÚLTIPLE (DOBLE)

Se utiliza para factorizar algunos polinomios de seis términos cuyo grado sea par.

$$P(x, y) = ax^{2m} + bx^m y^n + cy^{2n} + dx^m + ey^n + f$$

Donde los términos marcados con * son fijos, con cada dos de ellos se ejecuta un aspa simple.

Esquema:

$$\begin{array}{ccccccc} ax^{2m} & + & bx^m y^n & + & cy^{2n} & + & dx^m + ey^n + f \\ * & & & & * & & * \\ a_1 x^m & & & & c_1 y^n & & f_1 \\ a_2 x^m & & & & c_2 y^n & & f_2 \end{array}$$

Donde se verifica:

$$a_1 c_2 x^m y^n + a_2 c_1 x^m y^n = bx^m y^n ; c_1 f_2 y^n + c_2 f_1 y^n = ey^n$$

$$a_1 f_2 x^m + a_2 f_1 x^m = dx^m$$

$$\therefore P(x, y) = (a_1 x^m + c_1 y^n + f_1)(a_2 x^m + c_2 y^n + f_2)$$

Ejemplos:

Para:

$$P(x, y) = 6x^2 + 19xy + 15y^2 - 17y - 11x + 4$$

$$P(x, y) = 6x^2 + 19xy + 15y^2 - 11x - 17y + 4$$

$$\begin{array}{ccccccc} 6x^2 & + & 19xy & + & 15y^2 & - & 11x - 17y + 4 \\ * & & & & * & & * \\ 3x & & & & 5y & & -4 \\ 2x & & & & 3y & & -1 \end{array}$$

$$\therefore P(x, y) = (3x + 5y - 4)(2x + 3y - 1)$$

Para:

$$P(x, y) = 36x^2 - 48xy + 123x - 52y + 91$$

$$P(x, y) = 36x^2 - 48xy + 0y^2 + 123x - 52y + 91$$

$$\begin{array}{ccccccc} 36x^2 & - & 48xy & + & 0y^2 & + & 123x - 52y + 91 \\ * & & & & * & & * \\ 12x & & & & 0y & & 13 \\ 3x & & & & -4y & & 7 \end{array}$$

$$\therefore P(x, y) = (12x + 13)(3x - 4y + 7)$$

7. MÉTODO DEL ASPA DOBLE ESPECIAL

Se utiliza para factorizar algunos polinomios de cuarto grado, completos y ordenados en forma decreciente.

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Esquema:

$$\begin{array}{rcl}
 ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e & & \\
 \begin{array}{c} * \\ a_1x^2 \\ a_2x^2 \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} n_1x \\ n_2x \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} * \\ e_1 \\ e_2 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} a_2e_1x^2 \\ a_1e_2x^2 \end{array} \} \oplus \\
 & & \oplus = mx^2 \\
 * cx^2 - mx^2 = \frac{nx^2}{} & &
 \end{array}$$

Donde se verifica: $a_1n_2x^3 + a_2n_1x^3 \equiv bx^3 \wedge n_1e_2x + n_2e_1x \equiv dx$



OBSERVACIÓN

A veces luego de efectuar el aspa doble especial, se culmina la factorización por aspa simple.

Ejemplos: Para: $P(x) = x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 17x + 5$

$$P(x) = x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 17x + 5$$

$$\begin{array}{rcl}
 * & & * \\
 \begin{array}{c} x^2 \\ x^2 \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} 2x \\ 3x \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ 1 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} 5x^2 \\ x^2 \end{array} \} \oplus \\
 & & \oplus = 6x^2 \\
 * 12x^2 - 6x^2 = \frac{6x^2}{} & &
 \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x^2 + 2x + 5)(x^2 + 3x + 1)$$

Para: $P(x) \equiv 2x^4 - 5x + 3x^3 - 10x^2 - 6$

$$P(x) \equiv 2x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 5x - 6$$

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{c} * \\ x^2 \\ 2x^2 \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow \\ \times \\ \times \end{array} & \begin{array}{c} x \\ x \end{array} \\
 \begin{array}{c} * \\ x^2 \\ 2x^2 \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow \\ \times \\ \times \end{array} & \begin{array}{c} -6 \\ 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} -12x^2 \\ x^2 \end{array} \} \oplus \\
 & & \oplus = -11x^2 \\
 & & * -10x^2 - (-11x^2) = x^2
 \end{array}$$

$$\therefore P(x) \equiv (x^2 + x - 6)(2x^2 + x + 1)$$

Observa que:

$$x^2 + x - 6 \equiv (x + 3)(x - 2)$$

$$\begin{array}{c} x \\ x \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \times \\ \times \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ -2 \end{array}$$

$$\therefore P(x) \equiv (x + 3)(x - 2)(2x^2 + x + 1)$$

Para: $P(x) \equiv x^4 + 2x^3 + 5x + 2$

$$P(x) \equiv x^4 + 2x^3 + 0x^2 + 5x + 2$$

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{c} * \\ x^2 \\ x^2 \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow \\ \times \\ \times \end{array} & \begin{array}{c} -x \\ 3x \end{array} \\
 \begin{array}{c} * \\ x^2 \\ x^2 \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow \\ \times \\ \times \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2x^2 \\ x^2 \end{array} \} \oplus \\
 & & \oplus = 3x^2 \\
 & & * 0x^2 - 3x^2 = -3x^2
 \end{array}$$

$$\therefore P(x) \equiv (x^2 - x + 2)(x^2 + 3x + 1)$$

8. MÉTODO DE LOS DIVISORES BINÓMICOS

Se utiliza para encontrar los factores lineales (de primer grado) de un polinomio, su aplicación se fundamenta en el teorema del factor.

CERO DE UN POLINOMIO

Dado un polinomio $P(x)$ si al reemplazar x por a , el polinomio se anula, se dice que $x = a$ es un cero de $P(x)$

Ejemplo: Para $P(x) \equiv x^5 - 2x + 1$, $x = 1$ es un cero ¿por qué? Porque $P(1) = 0$

POSIBLES CEROS DE UN POLINOMIO

Son valores que podrá asumir la variable de modo que posiblemente el polinomio se anule. Los posibles ceros (PC) se obtienen por combinación a partir de la relación:

$$\text{Sea el polinomio: } P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

$$PC = \pm \left\{ \begin{array}{l} \text{Divisores de } |a_n| \\ \text{Divisores de } |a_0| \end{array} \right\}$$

Ejemplo: Para el polinomio: $P(x) = 6x^3 - 19x^2 + 2x + 3$

Término independiente = 3 $\wedge$ Coeficiente principal = 6

$$PC = \pm \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 3, \frac{3}{2} \right\}$$

OBSERVACIÓN

Una vez determinado el conjunto de los posibles ceros de un polinomio se podrá escoger de él un valor para "x" y luego mediante la regla de Ruffini obtener residuo cero para así garantizar que el valor escogido es el cero del polinomio, de no obtener residuo cero el valor escogido no será un cero del polinomio.

Si: $x = 1$

	6	-19	2	3
1	↓	6	-13	-11
	6	-13	-11	-8

Como el residuo no salió cero, entonces $x = 1$ no es un cero de $P(x)$

Si: $x = \frac{1}{2}$

	6	-19	2	3
$\frac{1}{2}$	↓	3	-8	-3
	6	-16	-6	0

Como el residuo salió cero, entonces $x = \frac{1}{2}$ es un cero de $P(x)$

TEOREMA DEL FACTOR:

Dado un polinomio $P(x)$: si $x = a$ es un cero del polinomio, entonces $(x - a)$ es un factor de $P(x)$

Ejemplos:

- Si $P(x)$ se anula cuando $x = 4$, entonces $(x - 4)$ es un factor de $P(x)$
- Si $P(x)$ se anula cuando $x = -3$, entonces $(x + 3)$ es un factor de $P(x)$
- Si $P(x)$ se anula cuando $x = \frac{1}{2}$, entonces $(2x - 1)$ es un factor de $P(x)$
- Si $P(x)$ se anula cuando $x = \dots$, entonces $(5x + 4)$ es un factor de $P(x)$

REGLAS PARA FACTORIZAR SEGÚN DIVISORES BINÓMICOS:

1. Se calcula un cero del polinomio dado según la regla de Ruffini.
2. Se determina al factor lineal, siendo el otro factor el cociente de la división efectuada.

Ejemplo:

Para:

$$P(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

$$PC = \pm \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{1} \right\} = \pm \{1; 2\}$$

Si: $x = 1$

	1	-3	4	-2
1	↓	1	-2	2
	1	-2	2	0

Observa que el factor es $(x - 1)$, luego tenemos:

$$P(x) \equiv (x - 1)(x^2 - 2x + 2) \text{ ¡Ya está factorizado!}$$

Ejemplo:

Para:

$$P(x) \equiv 6x^3 - 19x^2 + 2x + 3$$

$$PC = \pm \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 3, \frac{3}{2} \right\}$$

Si: $x = \frac{1}{2}$

	6	-19	2	3
$\frac{1}{2}$	↓	3	-8	-3
	6	-16	-6	0

+ 2: 3 -8 -3 ← Coef. del cociente

Observa que el factor es $(2x - 1)$, luego

$$P(x) \equiv (2x - 1)(3x^2 - 8x - 3)$$

Admite aspa simple

$$3x^2 - 8x - 3 \equiv (3x + 1)(x - 3)$$

$$\begin{array}{c} 3x \quad 1 \\ \quad \diagup \quad \diagdown \\ x \quad -3 \end{array}$$

$$\therefore P(x) \equiv (2x - 1)(3x + 1)(x - 3)$$

Ejemplo:

Para:

$$F(x) \equiv 3x^5 - 8x^4 - 45x^3 + 22x^2 + 132x + 40$$

$$PC = \pm \left\{ 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \frac{20}{3}, \frac{40}{3} \right\}$$

Si: $x = 2$

	3	-8	-45	22	132	40
2	↓	6	-4	-98	-152	-40
	3	-2	-49	-76	-20	0

Si: $x = -2$

-2	↓	-6	16	66	20	
	3	-8	-33	-10	0	

Si: $x = -2$

-2	↓	-6	28	10		
	3	-14	-5	0		

Se observa que los factores son $(x - 2)$, $(x + 2)$, $(x + 2)$

$$(x - 2)(x + 2)^2(3x^2 - 14x - 5)$$

$$\begin{array}{c} 3x \quad 1 \\ \quad \diagup \quad \diagdown \\ x \quad -5 \end{array}$$

$$\therefore F(x) \equiv (x - 2)(x + 2)^2(3x + 1)(x - 5)$$



OBSERVACIÓN

El método de los divisores binómicos se aplica frecuentemente para factorizar polinomios de grado impar.

9. MÉTODO DE LOS ARTIFICIOS

Consiste en la aplicación de un cambio de variable a una estructura repetida o la suma y resta simultánea de un determinado término al polinomio dado a factorizar, todo ello con la finalidad de aplicar un método visto anteriormente a la factorización planteada.

9.1 CAMBIO DE VARIABLE

Para: $P(x) \equiv (x-2)(x+3)(x+2)(x-1) + 3$

Agrupando convenientemente para obtener una estructura repetida

$$P(x) \equiv [(x-2)(x+3)][(x+2)(x-1)] + 3$$

$$P(x) \equiv [x^2 + x - 6][x^2 + x - 2] + 3$$

Hagamos: $x^2 + x = m$, luego se tendrá:

$$P \equiv (m-6)(m-2) + 3 \equiv m^2 - 8m + 12 + 3$$

$$P \equiv m^2 - 8m + 15$$

Aspa simple: $P \equiv m^2 - 8m + 15 \equiv (m-5)(m-3)$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ m & \times & -5 \\ & \downarrow & \\ m & \times & -3 \end{array}$$

Finalmente como $m = x^2 + x$ tenemos:

$$\therefore P(x) \equiv (x^2 + x - 5)(x^2 + x - 3)$$

Para: $P(x) \equiv (x^2 + x)(x^2 + 5x + 6) + (x^2 + 3x + 1)^2 + 1$

Observar que: $x^2 + x \equiv x(x+1) \quad \wedge \quad x^2 + 5x + 6 \equiv (x+3)(x+2)$

Ahora: $P(x) \equiv x(x+1)(x+3)(x+2) + (x^2 + 3x + 1)^2 + 1$

Con la finalidad de obtener: $x^2 + 3x$ agrupamos de la manera siguiente:

$$P(x) \equiv [x(x+3)][(x+1)(x+2)] + (x^2 + 3x + 1)^2 + 1$$

$$P(x) \equiv [x^2 + 3x][x^2 + 3x + 2] + (x^2 + 3x + 1)^2 + 1$$

Hagamos: $x^2 + 3x + 1 = m$, luego se tendrá:

$$P(x) \equiv (m-1)(m+1) + m^2 + 1 \equiv m^2 - 1 + m^2 + 1 \equiv 2m^2$$

$$\therefore P(x) \equiv 2(x^2 + 3x + 1)^2$$

9.2 SUMAS Y RESTAS ESPECIALES:

Para: $P(x) \equiv x^5 + x + 1$

Sumando y restando x^2 para obtener una diferencia de cubos:

$$P(x) \equiv x^5 - x^2 + x^2 + x + 1$$

$$P(x) \equiv x^2 \cdot (x^3 - 1) + x^2 + x + 1$$

$$P(x) \equiv x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

Por factor común: $P(x) \equiv (x^2 + x + 1)[x^2(x - 1) + 1]$

$$\therefore P(x) \equiv (x^2 + x + 1) \cdot (x^3 - x^2 + 1)$$

Para: $P(x) \equiv x^8 - x + 1$

Sumando y restando x^2 para obtener una diferencia de cuadrados:

$$P(x) \equiv x^8 - x^2 + x^2 - x + 1$$

$$P(x) \equiv x^2 \cdot (x^6 - 1) + x^2 - x + 1$$

$$P(x) \equiv x^2 \cdot \underbrace{(x^3 + 1)}_{\text{suma de cubos}} \cdot (x^3 - 1) + x^2 - x + 1$$

$$P(x) \equiv x^2 \cdot (x + 1)(x^2 - x + 1) \cdot (x^3 - 1) + (x^2 - x + 1)$$

$$P(x) \equiv (x^2 - x + 1)[x^2(x + 1) \cdot (x^3 - 1) + 1]$$

$$\therefore P(x) \equiv (x^2 - x + 1)(x^6 + x^5 - x^3 - x^2 + 1)$$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE POLINOMIOS**MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M. C. D.)**

El M.C.D de dos o más polinomios es el polinomio de mayor grado posible contenido como factor en cada uno de los polinomios dados.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (M. C. M.)

El M.C.M de dos o más polinomios es el polinomio de menor grado posible que contiene a cada uno de los polinomios dados.

REGLAS PARA DETERMINAR EL M.C.D. Y EL M. C. M.

1. Se factoriza totalmente a cada uno de los polinomios dados.
2. El M.C.D estará representado por la multiplicación de todos los factores primos comunes considerados con su menor exponente.
3. El M.C.M estará representado por la multiplicación de todos los factores primos comunes y no comunes considerados con su mayor exponente.

Ejemplo: Para: $P(x) = x^3(x-2y)^4(x+y)$
 $Q(x) = (x+y)^2(x+2y)x^2$
 Tenemos: $MCD(P \wedge Q) = x^2(x+y)$
 $MCM(P \wedge Q) = x^3(x+y)^2(x-2y)^4(x+2y)$

PROPIEDADES

1. Para dos polinomios: $P \wedge Q$, el producto de ellos será idéntico al producto de su MCD por su MCM.

$$P \cdot Q = MCD(P \wedge Q) \cdot MCM(P \wedge Q)$$

2. El MCD de dos polinomios $P \wedge Q$ estará contenido en la suma y/o diferencia de ellos.

$$MCD(P \wedge Q) \subset (P \pm Q)$$

3. El MCM de dos o más polinomios es divisible por cada uno de los polinomios dados.
4. El MCD de dos o más polinomios divide en forma exacta a cada uno de los polinomios dados.

Ejemplo: Si $(x - 1)$ es el MCD de los polinomios $P \wedge Q$, donde:

$$P(x) \equiv x^3 - 6x^2 + 11x + m \quad \wedge \quad Q(x) \equiv x^2 - 2nx + 1$$

Calcular: $m + n$

Resolución: Teniendo en cuenta la cuarta propiedad planteamos dos divisiones exactas, veamos:

$$\text{I.} \quad \frac{x^3 - 6x^2 + 11x + m}{x - 1}$$

Por el Teorema del Resto: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$$1^3 - 6(1)^2 + 11(1) + m = 0$$

$$1 - 6 + 11 + m = 0 \Rightarrow m = -6$$

$$\text{II.} \quad \frac{x^2 - 2nx + 1}{x - 1}$$

Por el Teorema del Resto: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$$1^2 - 2n(1) + 1 = 0$$

$$1 - 2n + 1 = 0 \Rightarrow n = 1$$

$$\therefore \quad m + n = -5$$



PROBLEMAS RESUELTOS

1. Del siguiente polinomio:

$$P(x; y) \equiv (3x + 2y)(x^2 + y^2)(x - y)$$

Podemos afirmar que:

- () Tiene 3 factores primos lineales.
 () Un factor primo es cuadrático.
 () La suma de coeficientes de un factor primo es 5.

- A) VFF B) VFV C) VVV
 D) FFV E) FVV

2. Reconocer a uno de los factores primos de:
- $P(x; y) \equiv x^4y - 2x^3y^2 + x^2y^3$

- A) x^2 B) $x + y$ C) $2x - y$
 D) $x - y$ E) $x - 2y$

3. Indicar el número de factores primos del siguiente polinomio:

$$P(x) \equiv x^5 + x^4 - x^3 - x^2$$

- A) 4 B) 3 C) 2
 D) 5 E) 1

4. Factorizar:

$$P(x) \equiv (x+1)(2x+1)(3x+1) + (x+1)^2 + x + x^2$$

- A) $(x+2)(3x+1)(x+1)$
 B) $(x+1)(2x+1)x$
 C) $(x-2)(x-1)(3x+1)$
 D) $(2x+1)(x+1)(3x+1)$
 E) $(x+1)(2x+1)(3x+2)$

5. Determinar el número de factores primos lineales que presenta el polinomio:

$$P(x; y) \equiv x^3y^2 + 2x^2y^3 - x^2y^4 - 2xy^5$$

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5

6. Reconocer un factor primo del polinomio:

$$P(x; y; z; w) \equiv x^4y^2 - x^4z^2 + w^4z^2 - w^4y^2$$

- A) $x + z$ B) $w - y$ C) $z + w$
 D) $x - w$ E) $y^2 + z^2$

7. Determinar la suma de los coeficientes de uno de los factores primos del polinomio:
- $P(x; y) \equiv x^2 - 9y^2 + 4x + 4$

- A) 0 B) 2 C) 3
 D) 5 E) 7

8. Luego de factorizar al polinomio:

$$P(x) \equiv x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$$

Indicar el número de factores primos obtenidos.

- A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 7

9. Luego de factorizar:

$$F(x) \equiv 3x^2 + 4x - 7$$

Determine la suma de los términos independientes de sus factores primos.

- A) 5 B) 6 C) 4
 D) 3 E) 7

10. Determinar la suma de todos los factores primos del siguiente polinomio:

$$P(x; y) \equiv x^5y^4 + x^4y^5 - 6x^3y^6$$

- A) $x - 2y$ B) $2x + y$ C) $3x + y$
 D) $3x - y$ E) $3x + 2y$

11. Factorizar:

$$P(x, y) = 6(x - y)^2 + 13(x - y) + 6$$

- A) $(3x - 3y + 2)(x - y)$
 B) $(3x + 3y + 2)(x - y + 3)$
 C) $(3x - 3y + 2)(2x - 2y + 3)$
 D) $(x + y + 2)(x - y + 3)$
 E) $(3x - 3y - 2)(2x - 2y - 3)$

12. Al factorizar al siguiente polinomio:

$$P(x) = 8x^6 + 9x^3 + 1$$

Se obtiene un factor primo de la forma: $ax^2 + bx + c$ donde: $a \neq c$, calcular: $a - b + c$

- A) 1 B) 3 C) 5
 D) 7 E) 8

13. Indicar la suma de los coeficientes de uno de los factores primos del siguiente polinomio:

$$P(x, y, z) = 12(x + y + z)^2 + (x + z)y$$

- A) 5 B) 10 C) 11
 D) 12 E) $B \vee C$

14. Indicar la suma de todos los factores primos lineales que presenta el polinomio:

$$P(x) = (x^2 + x + 3)^2 - 4x^2 - 4x - 17$$

- A) $2x + 1$ B) $x + 2$ C) $3x - 1$
 D) $4x + 3$ E) $2x - 1$

15. Determinar la suma de los coeficientes de uno de los factores primos del siguiente polinomio:

$$P(x, y) = 2x^2 + 22y + 7xy - 8 - 15y^2 - 6x$$

- A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 6

16. Reconocer a uno de los factores primos del polinomio:

$$P(x, y) = 15x^2 - 22xy + 24x + 8y^2 - 16y$$

- A) $5x - 4y - 8$ B) $5x + 4y - 8$
 C) $3x + y$
 D) $3x - y - 4$ E) $3x - 2y$

17. Calcular la suma de los términos independientes de todos los factores primos del polinomio.

$$P(x) = 6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 6$$

- A) 10 B) 1 C) 3
 D) 4 E) 5

18. Calcular la suma de los coeficientes de uno de los factores primos del polinomio:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 12$$

- A) 2 B) -3 C) 4
 D) -1 E) $C \vee D$

19. Reconocer uno de los factores primos del polinomio: $P(x) = 3x^4 + x^2 + 2x + 1$

- A) $x^2 + x + 1$ B) $4x^2 + 3x + 1$
 C) $x^2 + x - 1$
 D) $3x^2 + 3x + 1$ E) $3x^2 - 3x + 1$

20. Luego de factorizar al polinomio:

$$P(x) = 2x^4 + x^3 - 16x^2 + 8x - 1;$$

uno de sus factores primos asume la forma: $x^2 + nx + k$, luego el valor que asume "n + k" es:

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5

21. Luego de factorizar al polinomio:

$$P(x) \equiv x^4 + 9x^2 + 25$$

Indicar un factor de la suma de sus factores primos.

- A) $x^2 + 5$ B) $x + 1$
 C) $x^2 + 10$
 D) $x^2 + 2x + 10$ E) x

22. Luego de factorizar:

$$Q(x) = 5x^3 - 11x^2 + 6$$

Se obtiene un factor de la forma:

$ax^2 + bx + b$ indique la relación entre a y b .

- A) $ab = 30$ B) $a + b = 11$
 C) $-1,2$
 D) $-1,2$ E) $a+b = -11$

23. Factorizar:

$$P(x) \equiv x^4 + x^2 + 1$$

- A) $(x^2 - x - 1)(x^2 + 1)$
 B) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
 C) $(x^2 + x - 1)(x^2 - 1)$
 D) $(x^2 - x - 1)(x^2 - x + 1)$
 E) $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$

24. Si
- $(x + 2)$
- es un factor del polinomio:

$$P(x) \equiv x^3 + nx + 14$$

¿Cuál es el otro?

- A) $x^2 + x + 7$ B) $x^2 - x - 7$
 C) $x^2 - 2x - 7$
 D) $x^2 - 2x + 7$ E) $x^2 + x - 7$

25. Determinar el MCM de los polinomios:

$$P(x) \equiv x^3 + x^2 - x - 1$$

$$Q(x) \equiv x^2 - 3x + 2$$

- A) $(x + 1)^2(x - 1)(x - 2)$
 B) $(x + 1)(x - 1)(x + 2)$
 C) $x - 1$
 D) $(x + 1)^2(x - 1)^2(x - 2)$
 E) $(x + 1)(x - 1)^2(x - 2)$

26. Determinar el MCD de los siguientes polinomios:

$$P(x) \equiv x^3 - 3x - 2 \wedge Q(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 4$$

- A) $x^2 + x + 2$ B) $x^2 + x - 2$
 C) $x^2 - x - 2$
 D) $x^2 - x + 2$ E) $(x + 1)^2(x - 2)^2$

27. COLUMNA (A)

El número de factores primos del polinomio:

$$P(w; x; y; z) \equiv (w+x)(w+y) - (x+z)(y+z)$$

COLUMNA (B)

El número de factores primos del polinomio:

$$F(x; y) \equiv x^3 + x^2y - 4xy^2 - 4y^3$$

- A) A es mayor que B
 B) A es menor que B
 C) A es igual que B
 D) ¡No utilizar esta opción!
 E) No se puede determinar

28. Al factorizar:
- $P(x; y; z; w) \equiv x^4z^4 - x^4w^4 - y^4z^4 + y^4w^4$

Indicar el número de factores primos obtenidos

- A) 3 B) 4 C) 5
 D) 6 E) 2

29. ¿Cuántos factores primos lineales presenta el polinomio:

$$P(x) \equiv 8x^6 - 63x^3 - 8?$$

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 6

30. Reconocer a uno de los factores primos de:
- $P(x) \equiv 6x^3 + x^2 - 9x - 9$

- A) $3x^2 - 5x + 3$ B) $2x + 3$
 C) $2x - 3$
 D) $3x^2 + 5x - 3$ E) $3x - 2$

31. Luego de factorizar al polinomio:

$$P(x) \equiv x^3 - 2x^2 - 13x - 10$$

Se evalúa a uno de sus factores primos para $x = 2$ y se obtiene:

- A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 2

32. ¿Cuántos factores presenta el polinomio:

$$P(x) \equiv (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1?$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

33. ¿Cuántos factores primos presenta la expresión:

$$P(w; x; y; z) \equiv wy + wz - wyz - xy - xz + xyz?$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

34. Reconocer un factor del polinomio:

$$P(x; y; z) \equiv xy(x-y) + yz(y-z) - xz(x-z)$$

- A) $x + y$ B) $xy + 1$ C) $y + z$
D) $x - z$ E) $xy - 1$

35. Factorizar el polinomio:

$$P(x; y) \equiv xy^3 - 3xy^2 + y^3 - 3y^2 + 3xy + 3y - x - 1.$$

E indicar un factor primo

- A) $x + 1$ B) $x + 2$ C) $y + 3$
D) $y - 3$ E) $4x + 1$

36. Respecto al polinomio:

$$Q(x) \equiv x^5 y^5 - 16xy^9$$

Dar el valor de verdad.

- I. Posee solo 4 factores primos.
II. Tres factores primos son lineales mónicos y no repetidos.
III. Admite un solo factor primo cuadrático cuya suma de coeficientes es 5.
IV. (xy) es un factor primo.

- A) FFVF B) VVVV C) VFVF
D) VVFF E) FFFV

37. Factorizar: $P(x) \equiv a^2 x^2 + abx - 2b^2$ y restar sus factores primos.

- A) $8b$ B) $3b$ C) $2b$
D) $7b$ E) $4b$

38. La suma de dos factores primos de:

$$P(x) \equiv (x-3)^4 - 5x(x-6) - 41 \text{ es:}$$

- A) $2x - 3$ B) $4x - 12$ C) $2x + 7$
D) $x + 3$ E) $4x + 1$

39. Factorizar el polinomio:

$$P(x; y) \equiv 3x^2 + 7x(y+2) + 2(y+2)^2 + 10x + 5(y+2) + 3; \text{ y dar como respuesta la suma de sus términos independientes de sus factores primos.}$$

- A) 5 B) 15 C) 13
D) 10 E) 20

40. Factorizar $P(x)$ e indique el número de factores primos cuadráticos:

$$P(x) \equiv x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 0 E) 4

41. Cuántos serán los factores primos mónicos que posee el polinomio:

$$P(x; y) = (x^2 + 3)(x^2 - 3) - 13(x + 1)(x - 1)$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

42. Al factorizar al siguiente polinomio por criterio de aspa doble especial se obtuvo el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc} & 3x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 & & & \\ & \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow & \\ mx^2 & & 2x & & a \\ & \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow & \\ nx^2 & & x & & b \end{array}$$

Calcular: $(m + n + a + b) a n$

- A) 20 B) 30 C) 24
D) 27 E) 36

43. Halle el factor primo del polinomio

$$P(x) = x^3 + (a - 1)x^2 - (a + 2)x - 2a$$

- A) $x + a$ B) $x + 2$ C) $x - 1$
D) $x + 7$ E) $2x + 1$

44. Calcular el producto de los términos de un factor primo de:

$$P(a; b) = (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + 6ab) + 5a^2b^2$$

- A) $5a^3b^3$ B) $2a^3b^3$ C) $3a^3b^3$
D) $6a^3b^3$ E) $4a^3b^3$

45. Al factorizar:

$$P(x; y) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 2$$

Indique cuántos factores primos tiene:

- A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 2

46. Factorizar:

$$P(x; y) = 5x^2 + 16xy + 3y^2 + 11x + 5y + 2$$

e indicar un factor primo.

- A) $x + 3y + 1$ B) $x + 3y + 2$
C) $2x + y + 5$
D) $x - y + 1$ E) $5x + y + 6$

47. Factorizar

$$P(x; y) = 6x^2 - 7xy + 2y^2 - 13x + 7y + 5$$

e indicar un factor primo.

- A) $3x - 2y - 5$ B) $3x - y$
C) $2x + y$
D) $3x + 5y$ E) $4x + 5y - 1$

48. Factorizar:

$$P(x) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 7x + 6$$

Señala un factor primo.

- A) $x^2 + 2x + 1$ B) $5x + 3$
C) $x^2 + x + 2$
D) $x^2 - x + 1$ E) $4x^2 + 2x + 1$

49. Factorizar:

$$P(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 - 3x + 5$$

e indicar un factor primo.

- A) $x^2 - 2x + 3$ B) $x^2 - x + 1$
C) $x^2 + 1$
D) $x^2 - 5x + 1$ E) $2x^2 + x + 1$

50. Factorizar: $P(x) = 5x^4 + 8x^3 - x - 2$; e indicar un factor primo

- A) $x^2 + x - 1$ B) $2x^2 + x + 3$
C) $x^2 + 3x + 1$
D) $x^2 + x + 5$ E) $x^2 + 4x + 3$

51. Factorizar:

$P(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 4$; e
indicar un factor primo

- A) $x^2 + 3$ B) $x^2 + 4$ C) $x^2 + 2$
D) $x^2 + 1$ E) $x^2 + 7$

52. Factorizar:

$F(x; y; z) = x(x^2 + yz) + z(x^2 + y^2) - y^3$
luego indicar un factor primo.

- A) $x + y - z$ B) $x + y + z$
C) $x - y + z$
D) $2x + y + z$ E) $3x + y - z$

53. Sea el polinomio: $P(x) = x^4 + 2x^2 + 9$
primo sobre $\mathbb{Q}$. Indicar la suma de
coeficientes de un factor primo de
 $P(x)$.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

54. Sea: $F(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 7$
Factorizar:

$$F(x) + F(5-x) + F(1-\sqrt[3]{9}).$$

Indicar uno de sus factores primos.

- A) $2x - 3$ B) $2x + 1$ C) $4x + 7$
D) $x - 1$ E) $2x - 5$

55. En base al polinomio:

$J(x; y; z) = x^2 + x - y^2 + y - z^2 - z + 2yz$
establezca el valor de verdad de las
siguientes proposiciones:

- I. $x - y + z + 1$ es un factor del
polinomio $J(x; y; z)$.
II. $x + y - z$ es uno de sus factores.
III. $2x - z + 1$ es la suma de todos sus
factores.

- A) VVF B) FFV C) VFV
D) FVV E) VVV

56. Indicar un factor primo de:

$$P(x; y) = x^4 + 6x^2 + 25$$

- A) $x^2 + 2x + 5$ B) $x^2 + x + 1$
C) $x^2 - x + 3$
D) $x^2 + 4x + 1$ E) $x^2 - x + 7$

57. Factorizar

$$P(a; b; x; y) = ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)$$

Indicar el número de factores primos
de segundo grado.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

58. Luego de factorizar el polinomio:

$$P(a; b) = a^4 + b^4 + a^2b^2$$

Indicar el número de factores primos.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

59. Factorizar:

$$P(a; b) = a^3 + b^3 - ab(a + b) - c^2(a + b)$$

e indique la suma de factores primos.

- A) $3a + b$ B) $3a + 5b$ C) $a + b$
D) $a - b$ E) $3a - b$

60. Hallar el valor numérico de un factor
primo en:

$$P(x) = x(c^4x - 6 - x) - 9$$

Para $x = -3$

- A) $-2c$ B) $-2c^2$ C) $3c^4$
D) $-3c^2$ E) $4c^2$

61. Dados los polinomios:

$$P(x; y) \equiv 2x^2 + 3xy + y^2 + y - 2$$

$$Q(x; y) \equiv x^2 + 6x - y^2 + 8y - 7$$

Si $F(x; y)$ representa la suma de los factores primos no comunes; calcular:
 $F(-3; 100)$.

- A) 2 B) 0 C) 3
D) 4 E) 5

62. Factorizar:

$$P(x) \equiv x^5 + 2x^4 + 3x^2 + x - 1$$

Indique la suma de los términos lineales de cada uno de sus factores primos.

- A) 2x B) 5x C) 3x
D) 8x E) 4x

63. Luego de factorizar:

$P(x) \equiv (x+y)(x+y+2)(x+y+1)(x+y+3) - 8$. Dar como respuesta el término independiente de un factor primo cuadrático.

- A) $y^3 + 8y + 9$ B) $y + 5$
C) $y^2 + 3y + 4$
D) $y^3 + 5$ E) $y^2 + 4$

64. Sumar los factores primos; luego de factorizar:

$$R(a; b; c) \equiv a^2 - b^2 - c^2 + 2(a + b - c + bc)$$

- A) $2a + b$ B) $2b + 3a$ C) $2(a + 1)$
D) $3a + 2$ E) $4a + 3$

65. Factorizar:
- $P(x) \equiv x(x+1)(x^3 - 7) - 6$
-
- Indicar el número de factores primos.

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 1 E) 0

66. Factorizar:

$P(a; b; c) \equiv (a + b + c)(ab + ac + bc) - abc$ e indicar uno de sus factores primos.

- A) $a + b$ B) $a - b$ C) $2a - b$
D) $3a + b$ E) $4a + b$

67. Factorizar

$P(x) \equiv x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$ e indicar la suma de coeficientes de uno de sus factores primos.

- A) 6 B) 5 C) 3
D) 2 E) 1

68. Luego de factorizar el polinomio:

$P(x; y) \equiv x^2 - y^2 + a^2 - b^2 + 2(ax - by)$
Indicar el número de factores lineales.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

69. Halle la suma de los coeficientes de un factor primo de:

$$A(x; y) \equiv M + Nx^2 + Py^2 + Qy + Rxy + 3x.$$

Si: M; N; P; Q son números consecutivos cuya suma es 15.

- A) $4 \wedge 5$ B) $2 \wedge 3$ C) $2 \vee 3$
D) $6 \vee 3$ E) $6 \wedge 3$

70. Dados los polinomios:

$$P(x) \equiv x^2(x^2 + 3)^2 - (3x^2 + 1)^2$$

$$Q(x) \equiv x^4 + 2x^2 - 3$$

Al factorizarlos dé por respuesta el factor común cuadrático.

- A) $x^3 + 1$ B) $x^2 - 2$ C) $x^2 - 1$
D) $x^2 + 3$ E) $x^2 + 4$

71. Reconocer un factor del siguiente polinomio: $P(x) \equiv x^7 + x^2 + 1$

A) $x^2 - x + 1$ B) $x^2 - x - 1$
C) $x^2 + x + 1$
D) $x^2 + x - 1$ E) $x^3 + x + 1$

72. Luego de factorizar al polinomio:

$P(x) \equiv x^6 - 4x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 16x + 16$
Determinar la suma de sus factores primos.

A) $x^2 + 2x + 1$ B) $x^2 + 3x$
C) $x^2 + 2x + 2$
D) $x^2 + x + 2$ E) $x^2 + x + 4$

73. Luego de factorizar al polinomio:

$P(x) \equiv (x+2)(x+3)(2x+1)(2x+3) - 4$
Calcular la suma de coeficientes del factor primo con mayor término independiente.

A) 4 B) 11 C) 16
D) 20 E) 8

74. Indicar el término independiente de uno de los factores primos del polinomio: $P(x; y) \equiv 2x(4x + 7y) - 3y(5y + 12) + 48x$

A) 3 B) 6 C) 9
D) 12 E) 15

75. Si $x - 2$ es el MCD de los polinomios:

$P(x) \equiv x^2 - mx + n$; $Q(x) \equiv x^2 + xn - m$
Calcular: $m + n$.

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 2

76. Sean los polinomios:

$P(x) \equiv (x^2 - 4)^3 (x + 2)^{2m-2} (x + 5)$
 $Q(x) \equiv (x^2 - 4)^2 (x - 2)^{n-1} (x + 7)$
Si: $MCM(P; Q) \equiv (x - 2)^3 (x + 2)^3 (x + 7)(x + 5)$
Calcular el máximo valor de $m + n$.

A) 2 B) 3 C) 1
D) 4 E) 5

77. Los trinomios: $P(x) \equiv 2x^2 + ax + 6$ y $Q(x) \equiv 2x^2 + bx + 3$ admiten un factor común de la forma $2x + c$. Determinar el valor de: $(a - b) \cdot c$

A) -3 B) -2 C) 2
D) 3 E) 6

78. Al factorizar en $\mathbb{Z}$ al polinomio:

$P(x) \equiv x^3 + 2x^2 - 2x - 1$, el número de factores obtenidos es

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

79. Reconocer un factor del siguiente polinomio:

$P(x) \equiv x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

A) $x^2 - x + 1$ B) $x^3 - x + 1$
C) $x^3 + x^2 + 1$
D) $x^3 + x + 1$ E) $x^3 + x^2 + x + 1$

80. Reconocer un factor primo del siguiente polinomio:

$P(a; b; c) \equiv a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 + 8abc$

A) $a^2 + b^2 + c^2$ B) $a + b + c$
C) $a - b$
D) $a + b$ E) $ab + ac + bc$

81. Identificar un factor primo del siguiente polinomio:

$$P(x; y; z) \equiv x^4 - y^4 - z^4 - 2x^2yz - y^2z^2$$

- A) $x^2 - y^2 + z^2 - yz$
 B) $x^2 + y^2 + z^2 - yz$
 C) $x^2 + y^2 + z^2 + yz$
 D) $x^2 + xyz + y^2$
 E) $x^2 + y^2 + z^2 - xyz$

82. Un factor primo del polinomio:

$$P(x; y; z) \equiv 5(x+y)^2 - (x+z)^2 - 5(y-z)^2 \text{ es:}$$

- A) $2x + 5y - 3z$ B) $x + y - z$
 C) $2x - y + z$
 D) $x - 3y$ E) $x - z$

83. Si: $P(x) \equiv x^3 + x^2 + mx + n$

$$Q(x) \equiv x^3 + ax^2 + bx + c; a \notin \{1; -3\}$$

$$\text{MCD}(P; Q) \equiv x^2 - 2x + 1$$

$$\text{MCM}(P; Q) \text{ cuando } x = -4 \text{ es } -75$$

Calcular: $mn + abc$

- A) -105 B) -110 C) -210
 D) -305 E) -470

84. Sean los polinomios

$$P(x) \equiv (x-2)(x^2 + x^2 + 3x + 3)$$

$$Q(x) \equiv (x^2 + 1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 9)$$

Tales que:

$$\text{MCM}(P; Q) \equiv (ax-2)(x^2+b)(x+1)$$

$$(dx+3)(cx^2+1)$$

Calcular: $abcd$

- A) -4 B) -3 C) 3
 D) 6 E) 9

85. Luego de factorizar al polinomio:

$$P(x) \equiv 2x^3 + 11x^2 + 17x + 6$$

Indicar verdadero (V) o falso (F) en cada proposición:

- I. Tiene dos factores primos lineales
 II. Tiene tres factores cuadráticos
 III. $(x+6)$ es un factor

- A) VVF B) FFV C) VVV
 D) FVF E) FVV

86. Indicar el número de factores primos del siguiente polinomio:

$$P(x) \equiv 2x^5 - x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 8x - 4$$

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5

87. Luego de factorizar al polinomio:

$$P(x) \equiv (x+2)(x+3)(x-4)(x-5) - 18; \text{ se observa que:}$$

- A) Tiene 3 factores primos
 B) Tiene 2 factores lineales
 C) $(x^2 + x - 6)$ es un factor
 D) $(x^2 - 2x - 17)$ es un factor primo
 E) $(x^2 + x - 9)$ es un factor

88. Reconocer un factor del polinomio:

$$P(x) \equiv x^5 + x^4 + 1$$

- A) $x^3 - x^2 + 1$ B) $x^3 + x - 1$
 C) $x^3 - x^2 - 1$
 D) $x^3 - x + 1$ E) $x^3 - x - 1$

89. Factorizar al polinomio:

$$P(x) \equiv x^7 + 2x^4 + x^2 + 1; \text{ para luego indicar el coeficiente del término lineal de uno de sus factores primos.}$$

- A) 1 B) 2 C) -1
 D) -2 E) $A \vee C$

90. Dados los polinomios:

$$M(x; y; z) \equiv x^a - 3y^b + 1z^c - 1$$

$$N(x; y; z) \equiv x^a - 1y^b + 3z^c - 4$$

$$F(x; y; z) \equiv x^a - 2y^b + 2z^c + 2$$

Si: $MCD(M, N \wedge F) \equiv x^6 y^8$,
encontrar: $MCM(M, N \wedge F)$

- A) $x^{10}y^6$ B) $x^8y^9z^6$ C) $x^8y^{10}z^6$
D) $x^7y^6z^5$ E) $x^8y^6z^9$

91. Sabiendo que el MCD de los polinomios:

$$P(x) \equiv 16x^3 - 4x^2 + 6x + m$$

$$Q(x) \equiv 8x^3 + 4x^2 + n$$

es: $4x^2 - 2x + 2$, calcular: $m + n$

- A) 2 B) 6 C) 4
D) 9 E) 10

92. El producto de dos polinomios en variable x es $(x^2 - 1)^2$ y el cociente de su MCM dividido por su MCD es $(x-1)^2$. Determinar el MCD.

- A) $x + 1$ B) $x^2 + 1$ C) $(x + 1)^2$
D) $(x - 1)^2$ E) $x - 1$

93. Reconocer un factor de:

$$P(x; y; z) \equiv [x^2(y + xz) + yz(z + xy)] + xz[z(x + yz) + y(xyz + 1)]$$

- A) $x + z$ B) $x + y$ C) $xz + y$
D) $xyz + 1$ E) $y + 1$

94. Determinar el número de factores del siguiente polinomio:

$$P(x; y) \equiv x(x^2 + xy - 1) - y(y^2 + xy - 1)$$

- A) 3 B) 6 C) 12
D) 4 E) 8

95. Sabiendo que: $x^2 + 2x + 3$ es un factor del polinomio:

$$P(x) \equiv x^4 + x^3 + 6x^2 + mx + n$$

Indicar lo correcto:

- A) $m + n = 21$ B) $mn < 0$
C) $m < 0$
D) n es par E) $n - 2m = 1$

96. Luego de factorizar al polinomio:

$$P(x; y) \equiv x^5 - x^4y - 2x^3y^2 + 2x^2y^3 + xy^4 - y^5$$

Indicar lo incorrecto:

- A) $(x + y)$ es un factor
B) Tiene dos factores primos
C) No tiene factores cuadráticos
D) El número de factores es 12
E) $(x^2 - y^2)$ es un factor

97. Indicar el número de factores primos del polinomio:

$$P(w; x; y; z) \equiv (w + z)^4 + (x^2 - y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)(w + z)^2$$

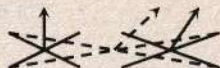
- A) 2 B) 4 C) 3
D) 5 E) 6

98. Indicar la suma de los coeficientes de un factor primo del polinomio:

$$P(x) \equiv x^6 + 4x^5 - 21x^4 - 20x^2 - 4$$

- A) 3 B) 7 C) 10
D) 4 E) -1

99. El esquema muestra la factorización por el método del aspa doble de un polinomio:



Según ello calcular: $T = (a + m + n)^{b+c}$

- A) 1 B) -1 C) 2
D) 4 E) 9

100. Determinar el número de factores primos del polinomio:

$$P(x) \equiv x^5 + 4x^4 - 10x^2 - x + 6$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolución 1: Observamos:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{i) Los factores primos son:} & \begin{array}{l} \rightarrow 3x + 2y \\ \rightarrow x^2 + y^2 \\ \rightarrow x - y \end{array} & \begin{array}{l} \text{Lineal} \\ \text{Cuadrático} \\ \text{Lineal} \end{array}
 \end{array}$$

ii) Suma de coeficientes de un factor primo es:

$$(3x + 2y) \rightarrow 5$$

$$(x^2 + y^2) \rightarrow 2$$

$$(x - y) \rightarrow 0$$

 $\therefore$ FVV**CLAVE: E**

Resolución 2: El polinomio dado es: $P(x; y) \equiv x^4y - 2x^2y^2 + x^2y^3$
 Por el factor común: $P(x; y) \equiv x^2 \cdot y \cdot (x^2 - 2xy + y^2)$
 Por las equivalencias:

$$\therefore P(x; y) \equiv x^2 \cdot y \cdot (x - y)^2$$

CLAVE: D

Resolución 3: El polinomio dado es: $P(x) \equiv x^5 + x^4 - x^3 - x^2$
 Por el factor común: $P(x) \equiv x^2[x^3 + x^2 - x - 1]$
 Por las agrupaciones: $P(x) \equiv x^2[(x^3 + x^2) + (-x - 1)]$
 Por el factor común: $P(x) \equiv x^2[x^2(x + 1) - (x + 1)]$
 $P(x) \equiv x^2 \cdot (x + 1)[x^2 - 1]$
 Por las equivalencias: $P(x) \equiv x^2 \cdot (x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$
 $P(x) \equiv x^2 \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 1)$
 $\therefore$ # de factores primos = 3

CLAVE: B

Resolución 4: El polinomio dado es: $P(x) \equiv (x+1)(2x+1)(3x+1) + (x+1)^2 + x + x^2$
 Por las agrupaciones: $P(x) \equiv (x+1)(2x+1)(3x+1) + (x+1)^2 + [x + x^2]$
 Por el factor común: $P(x) \equiv (x+1)(2x+1)(3x+1) + (x+1)^2 + x(1+x)$
 $P(x) \equiv (x+1)[(2x+1)(3x+1) + (x+1) + x]$

$$P(x) \equiv (x + 1) [(2x + 1)(3x + 1) + (2x + 1)]$$

$$P(x) \equiv (x + 1)(2x + 1)[(3x + 1) + 1]$$

$$\therefore P(x) \equiv (x + 1)(2x + 1)(3x + 2)$$

CLAVE: E

Resolución 5:

El polinomio dado es: $P(x; y) \equiv x^3y^2 + 2x^2y^3 - x^2y^4 - 2xy^5$

Por el factor común: $P(x; y) \equiv xy^2 [x^2 + 2xy - xy^2 - 2y^3]$

Por las agrupaciones: $P(x; y) \equiv xy^2 [(x^2 + 2xy) + (-xy^2 - 2y^3)]$

Por el factor común: $P(x; y) \equiv xy^2 [x(x + 2y) - y^2(x + 2y)]$

$$P(x; y) \equiv xy^2(x + 2y)(x - y^2)$$

Los primos lineales son: $x; y; x + 2y$

$$\therefore \# \text{FPL} = 3$$

CLAVE: C

Resolución 6:

El polinomio dado es: $P(x; y; z; w) \equiv x^4y^2 - x^4z^2 + w^4z^2 - w^4y^2$

Por las agrupaciones: $P(x; y; z; w) \equiv (x^4y^2 - x^4z^2) + (w^4z^2 - w^4y^2)$

Por el factor común: $P(x; y; z; w) \equiv x^4(y^2 - z^2) - w^4(y^2 - z^2)$

$$P(x; y; z; w) \equiv (y^2 - z^2) \cdot (x^4 - w^4)$$

Por las equivalencias: $P(x; y; z; w) \equiv (y + z)(y - z) \cdot (x^2 + w^2)(x^2 - w^2)$

$$\therefore P(x; y; z; w) \equiv (y + z)(y - z)(x^2 + w^2)(x + w)(x - w)$$

CLAVE: D

Resolución 7:

El polinomio dado es: $P(x; y) \equiv x^2 - 9y^2 + 4x + 4$

Por las agrupaciones: $P(x; y) \equiv (x^2 + 4x + 4) - 9y^2$

Por las equivalencias: $P(x; y) \equiv (x + 2)^2 - (3y)^2$

$$P(x; y) \equiv (x + 2 + 3y)(x + 2 - 3y)$$

Finalmente; para $(x + 2 + 3y)$:

$$\Sigma \text{Coef} = 1 + 2 + 3 = 6$$

Para; $(x + 2 - 3y)$:

$$\therefore \Sigma \text{Coef} = 1 + 2 - 3 = 0$$

CLAVE: A

- Resolución 8:** El polinomio dado es: $P(x) \equiv x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$
- Por las agrupaciones: $P(x) \equiv (x^7 - x^6) + (x^5 - x^4) + (x^3 - x^2) + (x - 1)$
- Por el factor común: $P(x) \equiv x^6(x - 1) + x^4(x - 1) + x^2(x - 1) + (x - 1)$
- $$P(x) \equiv (x - 1)[x^6 + x^4 + x^2 + 1]$$
- Por las agrupaciones: $P(x) \equiv (x - 1)[(x^6 + x^4) + (x^2 + 1)]$
- Por el factor común: $P(x) \equiv (x - 1)[x^4(x^2 + 1) + (x^2 + 1)]$
- $$P(x) \equiv (x - 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^4 + 1)$$
- $\therefore$ # factores primos = 3

CLAVE: B

- Resolución 9:** Aplicando aspa simple se obtiene:

$$F(x) \equiv 3x^2 + 4x - 7$$

$$F(x) \equiv (3x + 7)(x - 1)$$

Piden: Sumatoria de los Términos Independientes de los factores primos (Σ_{TIIP}), entonces:

$$\Sigma_{TIIP} = (7) + (-1)$$

$$\therefore \Sigma_{TIIP} = 6$$

CLAVE: B

- Resolución 10:** El polinomio dado es: $P(x; y) \equiv x^5y^4 + x^4y^5 - 6x^3y^6$
- Por el factor común: $P(x; y) \equiv x^3y^4(x^2 + xy - 6y^2)$
- Por el aspa simple: $P(x; y) \equiv x^3y^4(x^2 + xy - 6y^2)$

$$P(x; y) \equiv x^3y^4(x + 3y)(x - 2y)$$

$$\Sigma_{\text{Factores primos}} = x + y + x + 3y + x - 2y$$

$$\therefore \Sigma_{\text{Factores primos}} = 3x + 2y$$

CLAVE: E

Resolución 11: El polinomio dado es: $P(x; y) \equiv 6(x-y)^2 + 13(x-y) + 6$

Por el aspa simple: $P(x; y) \equiv 6(x-y)^2 + 13(x-y) + 6$

$$\begin{array}{r} 3(x-y) \quad \nearrow \quad 2 \\ 2(x-y) \quad \searrow \quad 3 \end{array}$$

$$P(x; y) \equiv [3(x-y) + 2] [2(x-y) + 3]$$

$$\therefore P(x; y) \equiv (3x - 3y + 2)(2x - 2y + 3)$$

CLAVE: C

Resolución 12: El polinomio dado es: $P(x) \equiv 8x^6 + 9x^3 + 1$

Por el aspa simple: $P(x) \equiv 8x^6 + 9x^3 + 1$

$$\begin{array}{r} 8x^3 \quad \nearrow \quad 1 \\ x^3 \quad \searrow \quad 1 \end{array}$$

$$P(x) \equiv (8x^3 + 1)(x^3 + 1)$$

$$P(x) \equiv [(2x)^3 + 1^3][x^3 + 1]$$

Por equivalencias: $P(x) \equiv (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$

Por condición: $ax^2 + bx + c \equiv 4x^2 - 2x + 1$

De donde tenemos: $a = 4 \wedge b = -2 \wedge c = 1$

$$\therefore a - b + c = 7$$

CLAVE: D

Resolución 13: El polinomio dado es: $P(x; y; z) \equiv 12[(x+z) + y]^2 + (x+z) y$

Hagamos un cambio de variable:

$$x + z = m$$

$$P \equiv 12(m + y)^2 + my$$

Por las equivalencias: $P \equiv 12(m^2 + 2my + y^2) + my$

$$P \equiv 12m^2 + 24my + 12y^2 + my$$

Por reducción: $P \equiv 12m^2 + 25my + 12y^2$

Por aspa simple: $P \equiv 12m^2 + 25my + 12y^2$

$$\begin{array}{r} 4m \quad \nearrow \quad 3y \rightarrow 16my \\ 3m \quad \searrow \quad 4y \rightarrow 12my \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 4m \quad \nearrow \quad 3y \\ 3m \quad \searrow \quad 4y \end{array}} \right\} \oplus$$

$$\hline 28my$$

$$P \equiv (4m + 3y)(3m + 4y)$$

Como se hizo un cambio de variable, entonces reemplazamos m por $x + z$:

$$P(x; y; z) \equiv [4(x + z) + 3y][3(x + z) + 4y]$$

$$P(x; y; z) \equiv (4x + 3y + 4z)(3x + 4y + 3z)$$

Finalmente, para $(4x + 3y + 4z)$:

$$\therefore \Sigma \text{Coef} = 4 + 3 + 4 = 11$$

Para $(3x + 4y + 3z)$:

$$\therefore \Sigma \text{Coef} = 3 + 4 + 3 = 10$$

CLAVE: E

Resolución 14: El polinomio dado es: $P(x) \equiv (x^2 + x + 3)^2 - 4x^2 - 4x - 17$

Descomponiendo a -17 :

$$P(x) \equiv (x^2 + x + 3)^2 - 4x^2 - 4x - 12 - 5$$

Agrupando convenientemente:

$$P(x) \equiv (x^2 + x + 3)^2 + (-4x^2 - 4x - 12) - 5$$

Por el factor común: $P(x) \equiv (x^2 + x + 3)^2 - 4(x^2 + x + 3) - 5$

Por el aspa simple: $P(x) \equiv (x^2 + x + 3)^2 - 4(x^2 + x + 3) - 5$

$$\begin{array}{r} (x^2 + x + 3) \quad \nearrow \quad -5 \\ (x^2 + x + 3) \quad \searrow \quad 1 \end{array}$$

$$P(x) \equiv [(x^2 + x + 3) - 5][(x^2 + x + 3) + 1]$$

$$P(x) \equiv (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 4)$$

$$P(x) \equiv (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 4)$$

$$\begin{array}{r} x \quad \nearrow \quad 2 \\ x \quad \searrow \quad -1 \end{array}$$

$$P(x) \equiv (x + 2)(x - 1)(x^2 + x + 4)$$

$$\Sigma \text{Factores primos lineales: } (x + 2) + (x - 1)$$

$$\therefore \Sigma \text{Factores primos lineales: } 2x + 1$$

CLAVE: A

Resolución 15: Ordenando al polinomio para aplicar aspa doble:

$$P(x; y) \equiv 2x^2 + 7xy - 15y^2 - 6x + 22y - 8$$

$$\begin{array}{r} * \quad \nearrow \quad * \quad \nearrow \quad * \\ 2x \quad \nearrow \quad -3y \quad \nearrow \quad 2 \\ x \quad \searrow \quad 5y \quad \searrow \quad -4 \end{array}$$

$$P(x; y) \equiv (2x - 3y + 2)(x + 5y - 4)$$

Para $(2x - 3y + 2)$:

$$\therefore \Sigma \text{Coef} = 2 - 3 + 2 = 1$$

Para $(x + 5y - 4)$:

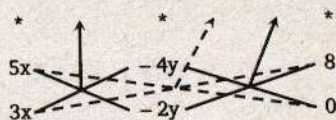
$$\therefore \Sigma \text{Coef} = 1 + 5 - 4 = 2$$

CLAVE: A

Resolución 16:

Completando y ordenando al polinomio dado para luego aplicar el aspa doble:

$$P(x; y) \equiv 15x^2 - 22xy + 8y^2 + 24x - 16y + 0$$



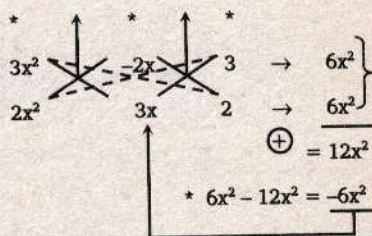
$$\therefore P(x; y) \equiv (5x - 4y + 8)(3x - 2y)$$

CLAVE: E

Resolución 17:

Por aspa doble especial:

$$P(x) \equiv 6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 6$$



$$P(x) \equiv (3x^2 - 2x + 3)(2x^2 + 3x + 2)$$

Para $(3x^2 - 2x + 3)$: $TI = 3$

Para $(2x^2 + 3x + 2)$: $TI = 2$

$$\therefore \Sigma TI = 3 + 2 = 5$$

CLAVE: E

Resolución 18: Por aspa doble especial:

$$P(x) \equiv x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 12$$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow -6x^2 \\ \rightarrow 2x^2 \end{array} \right\} \oplus = -4x^2$$

$$-3x^2 - (-4x^2) = x^2$$

$$P(x) \equiv (x^2 + x - 6)(x^2 + x + 2)$$

Aspa simple

$$P(x) \equiv (x + 3)(x - 2)(x^2 + x + 2)$$

Para $x + 3$

$$\Sigma \text{Coef} = 1 + 3 = 4$$

Para $x - 2$

$$\Sigma \text{Coef} = 1 - 2 = -1$$

Para $x^2 + x + 2$

$$\Sigma \text{Coef} = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$\therefore 4 \vee -1$$

CLAVE: E

Resolución 19: Completando el polinomio se procede a factorizar:

$$P(x) \equiv 3x^4 + 0x^3 + x^2 + 2x + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow 3x \\ \rightarrow 1 \end{array} \right\}$$

Como cumple entonces: $P(x) \equiv (3x^2 + 3x + 1)(x^2 - x + 1)$

$\therefore$ Uno de los factores es: $3x^2 + 3x + 1$

CLAVE: D

Resolución 20: Factorizando al polinomio según el aspa doble especial:

$$P(x) \equiv 2x^4 + x^3 - 16x^2 + 8x - 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow x^2 \\ \rightarrow -2x^2 \end{array} \right\} \oplus = -x^2$$

$$-16x^2 - (-x^2) = -15x^2$$

FACTORIZACIÓN - FRACCIONES ALGEBRAICAS

$$P(x) \equiv (2x^2 - 5x + 1)(x^2 + 3x - 1)$$

Por condición:

$$x^2 + nx + k \equiv x^2 + 3x - 1$$

De donde:

$$n = 3 \wedge k = -1$$

$$\therefore n + k = 2$$

CLAVE: B**Resolución 21:**

Completando al polinomio dado para aplicar aspa doble especial:

$$P(x) \equiv x^4 + 0x^3 + 9x^2 + 0x + 25$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \quad x \\ x^2 \quad x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow 5x^2 \\ \rightarrow 5x^2 \end{array} \oplus$$

$$= 10x^2$$

$$* 9x^2 - 10x^2 = -x^2$$

$$P(x) \equiv (x^2 - x + 5)(x^2 + x + 5)$$

$$\Sigma FP = x^2 - x + 5 + x^2 + x + 5 \equiv 2x^2 + 10$$

$$\therefore \Sigma FP = 2(x^2 + 5)$$

CLAVE: A**Resolución 22:**

Completamos y procedemos a factorizar:

$$\text{Si: } x = 1$$

	5	-11	0	6
1	↓	5	-6	-6
	5	-6	-6	0

$$Q(x) = (x - 1)(5x^2 - 6x - 6)$$

Como un factor es de la forma:

$$ax^2 + bx + b$$

$$a = 5 \wedge b = -6$$

$$\frac{b}{a} = -\frac{6}{5} = -1,2$$

$$\therefore \frac{b}{a} = -1,2$$

CLAVE: D

Resolución 23:

El polinomio dado se podrá factorizar por los métodos de reducción a diferencia de cuadrados o el aspa doble especial, pero lo factorizaremos por artificio ¿cómo? sumando y restando x , veamos:

$$P(x) \equiv x^4 + x^2 + 1$$

$$P(x) \equiv x^4 - x + x^2 + x + 1$$

$$P(x) \equiv x(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$P(x) \equiv x(x-1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$P(x) \equiv (x^2 + x + 1)[x(x-1) + 1]$$

$$\therefore P(x) \equiv (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

CLAVE: E**OBSERVACIÓN**

El polinomio dado es notable pues es un caso particular de la equivalencia de Argan'd (ver fascículo de productos notables)

$$x^4 + x^2 + 1 \equiv (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Resolución 24:

Por definición de factor, la división: $\frac{x^3 + nx + 14}{x + 2}$ es exacta.

Por el teorema del resto:

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$(-2)^3 + n(-2) + 14 = 0$$

$$-8 - 2n + 14 = 0 \Rightarrow n = 3$$

Ahora el polinomio dado es:

$$P(x) \equiv x^3 + 3x + 14$$

Como $(x + 2)$ es un factor: $x = -2$

	1	0	3	14
-2	↓	-2	4	-14
	1	-2	7	0

$$\therefore P(x) \equiv (x + 2)(x^2 - 2x + 7)$$

CLAVE: D

Resolución 25: Factorizando a cada uno de los polinomios dados:

Para:

$$P(x) \equiv x^3 + x^2 - x - 1$$

$$P(x) \equiv (x^3 + x^2) + (-x - 1) \equiv x^2(x + 1) - (x + 1)$$

$$P(x) \equiv (x + 1) \underbrace{(x^2 - 1)}_{(x+1)(x-1)} \equiv (x + 1)(x + 1)(x - 1)$$

$$P(x) \equiv (x + 1)^2(x - 1)$$

Para:

$$Q(x) \equiv x^2 - 3x + 2 \equiv x^2 - 3x + 2$$

$$\begin{array}{r} x \quad -2 \\ \times \quad -1 \\ \hline x \end{array}$$

$$Q(x) \equiv (x - 2)(x - 1)$$

Finalmente según la definición tenemos:

$$\therefore \text{MCM} \equiv (x - 1)(x + 1)^2(x - 2)$$

CLAVE: A

Resolución 26: Factorizando a cada uno de los polinomios dados según el método de los divisores binómicos:

Para el polinomio:

$$P(x) \equiv x^3 - 3x - 2$$

$x = -1$:

	1	0	-3	-2
-1	↓	-1	1	2
	1	-1	-2	0

$$P(x) \equiv (x + 1)(x^2 - x - 2)$$

Observa que:

$$x^2 - x - 2 \equiv (x - 2)(x + 1)$$

$$\begin{array}{r} x \quad -2 \\ \times \quad 1 \\ \hline x \end{array}$$

$$P(x) \equiv (x + 1)(x - 2)(x + 1)$$

$$P(x) \equiv (x + 1)^2(x - 2)$$

Para el polinomio:

$$Q(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 4$$

$x = -1$:

	1	-3	0	4
-1	↓	-1	4	-4
	1	-4	4	0

$$Q(x) \equiv (x + 1)(x^2 - 4x + 4)$$

$$Q(x) \equiv (x + 1)(x - 2)^2$$

Finalmente según la definición tenemos:

$$\therefore \text{MCD} \equiv (x + 1)(x - 2) \equiv x^2 - x - 2$$

CLAVE: C

Resolución 27: En la COLUMNA (A) tenemos:

$$P(w; x; y; z) \equiv w^2 + wy + xw + \underline{xy - xy - xz - zy - z^2}$$

$$P(w; x; y; z) \equiv w^2 + wy + xw - xz - zy - z^2$$

Agrupando dos a dos: $P(w; x; y; z) \equiv (w^2 - z^2) + (wy - zy) + (xw - xz)$

$$P(w; x; y; z) \equiv (w + z)(w - z) + y(w - z) + x(w - z)$$

Por factor común: $P(w; x; y; z) \equiv (w - z)(w + z + y + x)$

$$\therefore A = \#FP \Rightarrow A = 2$$

En la COLUMNA (B) tenemos:

$$F(x; y) \equiv x^3 + x^2y - 4xy^2 - 4y^3$$

Agrupando dos a dos: $F(x; y) \equiv (x^3 + x^2y) + (-4xy^2 - 4y^3)$

$$F(x; y) \equiv x^2(x + y) - 4y^2(x + y)$$

Por factor común: $F(x; y) \equiv (x + y)[x^2 - 4y^2]$

$$F(x; y) \equiv (x + y)[x^2 - (2y)^2]$$

Por equivalencia: $F(x; y) \equiv (x + y)(x + 2y)(x - 2y)$

$$\therefore B = \#FP \Rightarrow B = 3$$

CLAVE: B

Resolución 28: Agrupando dos a dos tenemos:

$$P(x; y; z; w) \equiv (x^4z^4 - x^4w^4) + (-y^4z^4 + y^4w^4)$$

$$P(x; y; z; w) \equiv x^4(z^4 - w^4) - y^4(z^4 - w^4)$$

$$P(x; y; z; w) \equiv (z^4 - w^4)(x^4 - y^4)$$

Por equivalencias: $P(x; y; z; w) \equiv (z^2 + w^2)(z^2 - w^2)(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$

$$P(x; y; z; w) \equiv (z^2 + w^2)(z + w)(z - w)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$$

$$\therefore \#FP = 6$$

CLAVE: D

Resolución 29: Por aspa simple:

$$P(x) \equiv 8x^5 - 63x^3 - 8$$

$$\begin{array}{r} 8x^3 \quad \uparrow \quad 1 \\ \quad \quad \quad \times \\ x^3 \quad \quad \quad -8 \end{array}$$

$$P(x) \equiv (8x^3 + 1)(x^3 - 8)$$

$$P(x) \equiv [(2x)^3 + 13][x^3 - 2^3]$$

Por equivalencias: $P(x) \equiv (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

$$\therefore \text{Factores primos lineales: } (2x + 1) \wedge (x - 2)$$

CLAVE: B

Resolución 30: Por divisores binómicos:

$$P(x) \equiv 6x^3 + x^2 - 9x - 9$$

$$PC = \pm \left\{ \frac{\text{Divisores de } |-9|}{\text{Divisores de } 6} \right\} = \pm \left\{ \begin{matrix} 1; 3; 9 \\ 1; 2; 3; 6 \end{matrix} \right\}$$

$$PC = \pm \left\{ 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}; 3; \frac{3}{2}; 9; \frac{9}{2} \right\}$$

Para: $x = \frac{3}{2}$

	6	1	-9	-9
$\frac{3}{2}$	↓	9	15	9
	6	10	6	0
+ 2:	3	5	3	

$$\therefore P(x) \equiv (2x - 3)(3x^2 + 5x + 3)$$

CLAVE: C

Resolución 31: Por divisores binómicos:

$$TI = -10 \wedge CP = 1$$

$$PC = \pm \{1; 2; 5; 10\}$$

Para: $x = -1$

	1	-2	-13	-10
-1	↓	-1	3	10
	1	-3	-10	0

$$P(x) \equiv (x + 1)(x^2 - 3x - 10)$$

Observa que:

$$x^2 - 3x - 10 \equiv (x - 5)(x + 2)$$

$$\begin{array}{c} \nearrow 5 \\ x \quad \times \\ \nwarrow 2 \end{array}$$

$$P(x) \equiv (x + 1)(x - 5)(x + 2)$$

Para $(x + 1)$:

si $x = 2$ entonces $VN = 3$

Para $(x - 5)$:

si $x = 2$ entonces $VN = -3$

Para $(x + 2)$:

si $x = 2$ entonces $VN = 4$

$$\therefore VN \text{ pedido} = 3$$

CLAVE: B

Resolución 32: Por artificio:

$$P(x) \equiv [(x + 1)(x + 4)][(x + 2)(x + 3)] + 1$$

$$P(x) \equiv [x^2 + 5x + 4][x^2 + 5x + 6] + 1$$

Hagamos:

$$x^2 + 5x + 4 = m \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = m + 2$$

$$P \equiv m(m+2) + 1 \equiv m^2 + 2m + 1$$

$$P \equiv (m+1)^2 \Rightarrow P(x) \equiv (x^2 + 5x + 4 + 1)^2$$

$$P(x) \equiv (x^2 + 5x + 5)^2$$

$$\therefore \#Fact = 2 + 1 = 3$$

CLAVE: C

Resolución 33: Agrupando de tres en tres:

$$P(w; x; y; z) \equiv (wy + wz - wyz) + (-xy - xz + xyz)$$

Por factor común:

$$P(w; x; y; z) \equiv w(y + z - yz) - x(y + z - yz)$$

$$P(w; x; y; z) \equiv (y + z - yz) \cdot (w - x)$$

$$\therefore \#FP = 2$$

CLAVE: B

Resolución 34: El polinomio dado es: $P(x; y; z) \equiv x^2y - xy^2 + y^2z - yz^2 - xz(x - z)$ Agrupando dos a dos: $P(x; y; z) \equiv (x^2y - yz^2) + (-xy^2 + y^2z) - xz(x - z)$

$$P(x; y; z) \equiv y(x^2 - z^2) - y^2(x - z) - xz(x - z)$$

$$P(x; y; z) \equiv y(x + z)(x - z) - y^2(x - z) - xz(x - z)$$

Por factor común:

$$P(x; y; z) \equiv (x - z)[y(x + z) - y^2 - xz]$$

$$P(x; y; z) \equiv (x - z)[xy + yz - y^2 - xz]$$

$$P(x; y; z) \equiv (x - z)[(xy - y^2) + (yz - xz)]$$

$$P(x; y; z) \equiv (x - z)[y(x - y) - z(x - y)]$$

$$\therefore P(x; y; z) \equiv (x - z)(x - y)(y - z)$$

CLAVE: B

Resolución 35: El polinomio dado es: $P(x; y) \equiv xy^3 - 3xy^2 + y^3 - 3y^2 + 3xy + 3y - x - 1$

Agrupando convenientemente tenemos:

$$P(x; y) \equiv y^3(x+1) - 3y^2(x+1) + 3y(x+1) - x - 1$$

$$P(x; y) \equiv y^3(x+1) - 3y^2(x+1) + 3y(x+1) - (x+1)$$

Extrayendo el factor común tenemos:

$$P(x; y) \equiv (x+1) \cdot (y^3 - 3y^2 + 3y - 1)$$

$$P(x; y) \equiv (x+1) \cdot (y-1)^3$$

$$\therefore \text{Los factores primos son: } (x+1) \text{ y } (y-1)$$

CLAVE: A

Resolución 36: Factorizando el polinomio dado:

$$Q(x; y) \equiv x^5 y^5 - 16xy^9$$

$$Q(x; y) \equiv x y^5 (x^4 - 16y^4)$$

$$Q(x; y) \equiv x y^5 (x^2 + 4y^2) (x^2 - 4y^2)$$

$$Q(x; y) \equiv x y^5 (x^2 + 4y^2) (x - 2y) (x + 2y)$$

Veamos cada proposición:

I. Falso (F)

El polinomio tiene 5 factores primos.

II. Falso (F)

El único polinomio mónico lineal no repetido es x .

III. Verdadero (V)

El único factor primo cuadrático es $(x^2 + 4y^2)$ y la suma de sus coeficientes es 5.

IV. Falso (F)

(xy) no es un factor primo, es compuesto.

$\therefore$ Combinación correcta = FFVF

CLAVE: A

Resolución 37: El polinomio dado es: $P(x) \equiv a^2 x^2 + abx - 2b^2$

Dando uso del aspa simple:

$$P(x) \equiv a^2 x^2 + abx - 2b^2$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ ax & \times & 2b \\ & \downarrow & \\ ax & \times & -b \end{array}$$

$$P(x) \equiv (ax + 2b)(ax - b)$$

Si R es la resta de los factores primos tenemos:

$$R_1 = ax + 2b - (ax - b) \Rightarrow R_1 = 3b$$

$$R_2 = ax - b - ax - 2b \Rightarrow R_2 = -3b$$

$$\therefore \text{Resta} = R = 3b \text{ ó } -3b$$

CLAVE: B

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 04

Resolución 38: El polinomio dado es: $P(x) \equiv (x-3)^4 - 5x(x-6) - 41$

Reescribiendo el polinomio en una forma conveniente:

$$P(x) \equiv [(x-3)^2]^2 - 5[x(x-6)] - 41$$

$$P(x) \equiv (x^2 - 6x + 9)^2 - 5(x^2 - 6x) - 41$$

Hagamos que $x^2 - 6x + 9 = m$, luego tenemos:

$$P \equiv (m)^2 - 5(m - 9) - 41$$

$$P \equiv m^2 - 5m + 45 - 41$$

$$P \equiv m^2 - 5m + 4$$

Dando uso del aspa simple obtenemos:

$$P \equiv (m - 4)(m - 1)$$

Reponiendo la variable original obtenemos:

$$P(x) \equiv (x^2 - 6x + 9 - 4)(x^2 - 6x + 9 - 1)$$

$$P(x) \equiv (x^2 - 6x + 5)(x^2 - 6x + 8)$$

Finalmente aplicamos un aspa simple en cada polinomio cuadrático:

$$P(x) \equiv (x - 1)(x - 5)(x - 2)(x - 4)$$

Si "S" es la suma de factores primos, tenemos:

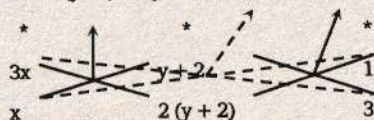
$$S \equiv (x - 1) + (x - 5) + (x - 2) + (x - 4)$$

$$\therefore S \equiv 4x - 12$$

CLAVE: B

Resolución 39: De acuerdo con el método del aspa múltiple (aspa doble) procedemos así:

$$P(x; y) \equiv 3x^2 + 7x(y+2) + 2(y+2)^2 + 10x + 5(y+2) + 3$$



$$P(x; y) \equiv (3x + y + 2 + 1)(x + 2y + 4 + 3)$$

$$P(x; y) \equiv (3x + y + 3)(x + 2y + 7)$$

Observa que los términos independientes en los factores primos son 3 y 7

$$\therefore \text{Suma de términos independientes} = 10$$

CLAVE: D

Resolución 40: De acuerdo con el método del aspa doble especial tenemos:

$$P(x) \equiv x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$$

$$\begin{array}{ccccc} & * & & * & \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ x^2 & \diagdown & -x & \diagdown & -2 \\ x^2 & \diagup & 0x & \diagup & 1 \end{array}$$

$$P(x) \equiv \underbrace{(x^2 - x - 2)}_{\text{Aspa simple}} (x^2 + 1)$$

$$P(x) \equiv (x - 2) (x + 1) (x^2 + 1)$$

$\therefore$ N° de factores primos cuadráticos = 1

CLAVE: A

Resolución 41: El polinomio dado es: $P(x) \equiv (x^2 + 3) (x^2 - 3) - 13 (x + 1) (x - 1)$

$$P(x) \equiv x^4 - 9 - 13 (x^2 - 1)$$

$$P(x) \equiv x^4 - 9 - 13x^2 - 13$$

$$P(x) \equiv x^4 - 13x^2 + 4$$

De acuerdo con el método del aspa doble especial procedemos así:

$$P(x) \equiv x^4 + 0x^3 - 13x^2 + 0x + 4$$

$$\begin{array}{ccccc} & * & & * & \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ x^2 & \diagdown & 3x & \diagdown & -2 \\ x^2 & \diagup & 3x & \diagup & -2 \end{array}$$

$$P(x) \equiv (x^2 + 3x - 2) (x^2 - 3x - 2)$$

Observa que ambos factores primos son mónicos:

$\therefore$ N° de factores primos mónicos = 2

CLAVE: B

Resolución 42: Nuestra estrategia para resolver este problema consistirá en factorizar al polinomio dado para luego reconocer, por comparación, cada parámetro desconocido.

$$P(x) \equiv 3x^4 - x^3 + 7x^2 + x + 6$$

$$\begin{array}{ccccc} & * & & * & \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ 3x^2 & \diagdown & 2x & \diagdown & -3 \\ x^2 & \diagup & -x & \diagup & -2 \end{array}$$

Observa que:

$$m = 3 \wedge n = 1 \wedge a = 3 \wedge b = 2$$

Finalmente tenemos: $K = (m + n + a + b) \cdot an$

$$K = (3 + 1 + 3 + 2) \cdot 3 = 9 \cdot (3)$$

$$\therefore K = 27$$

CLAVE: D

Resolución 43: De acuerdo con el método de los divisores binómicos escogemos:

$$x = 5 - a$$

	1	$(a - 1)$	$-(a + 2)$	$-2a$
$-a$	$\downarrow$	$-a$	a	$2a$
	1	-1	-2	0

Ahora tenemos:

$$P(x) \equiv (x + a) \underbrace{(x^2 - x - 2)}_{\text{Aspa simple}}$$

$$P(x) \equiv (x + a) (x + 1) (x - 2)$$

$$\therefore \text{Un factor primo} = x + a$$

CLAVE: A

Resolución 44: El polinomio dado es: $P(a; b) \equiv (a^2 + b^2) (a^2 + b^2 + 6ab) + 5a^2b^2$

$$P(a; b) \equiv (a^2 + b^2) [(a^2 + b^2) + 6(ab)] + 5(ab)^2$$

$$P(a; b) \equiv (a^2 + b^2) + 6(a^2 + b^2)(ab) + 5(ab)^2$$

$$\begin{array}{ccc} a^2 + b^2 & \nearrow & 5ab \\ & \uparrow & \\ a^2 + b^2 & \searrow & ab \end{array}$$

$$P(a; b) \equiv \underbrace{(a^2 + b^2 + 5ab)}_{f_1} \underbrace{(a^2 + b^2 + ab)}_{f_2}$$

En f_1 :

$$\text{Producto} = 5a^3b^3$$

En f_2 :

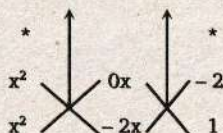
$$\text{Producto} = a^3b^3$$

$$\therefore \text{Producto pedido} = 5a^3b^3$$

CLAVE: A

Resolución 45: De acuerdo con el método del aspa doble especial tenemos:

$$P(x) \equiv x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 2$$



$$P(x) \equiv (x^2 - 2)(x^2 - 2x + 1)$$

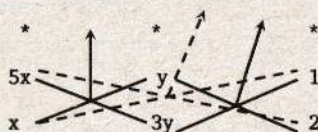
$$P(x) \equiv (x^2 - 2)(x - 1)^2$$

$\therefore$ N° de factores primos = 2

CLAVE: C

Resolución 46: De acuerdo con el método del aspa múltiple, tenemos:

$$P(x, y) \equiv 5x^2 + 16xy + 3y^2 + 11x + 5y + 2$$



$$P(x, y) \equiv (5x + y + 1)(x + 3y + 2)$$

$\therefore$ Un factor primo es: $x + 3y + 2$

CLAVE: B

Resolución 47: Según el método del aspa múltiple, procedemos de la manera siguiente:

$$P(x, y) \equiv 6x^2 - 7xy + 2y^2 - 13x + 7y + 5$$



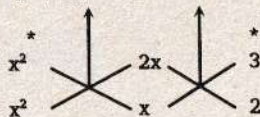
$$P(x, y) \equiv (3x - 2y - 5)(2x - y - 1)$$

$\therefore$ Un factor primos es: $3x - 2y - 5$

CLAVE: A

Resolución 48: De acuerdo con el método del aspa doble especial procedemos de la manera siguiente:

$$P(x) \equiv x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 7x + 6$$



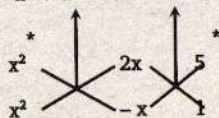
$$P(x) \equiv (x^2 + 2x + 3)(x^2 + x + 2)$$

$\therefore$ Un factor primo es: $x^2 + x + 2$

CLAVE: C

Resolución 49: Según el método del aspa doble especial:

$$P(x) \equiv x^4 + x^2 + 4x^2 - 3x + 5$$



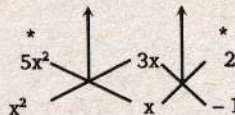
$$P(x) \equiv (x^2 + 2x + 5)(x^2 - x + 1)$$

$\therefore$ Un factor primo es: $x^2 - x + 1$

CLAVE: B

Resolución 50: De acuerdo con el método del aspa doble especial, tenemos:

$$P(x) \equiv 5x^4 + 8x^3 + 0x^2 - x - 2$$



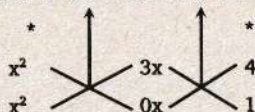
$$P(x) \equiv (5x^2 + 3x + 2)(x^2 + x - 1)$$

$\therefore$ Un factor primo es: $x^2 + x - 1$

CLAVE: A

Resolución 51: Según el método del aspa doble especial:

$$P(x) \equiv x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 4$$



$$P(x) \equiv (x^2 + 3x + 4)(x^2 + 1)$$

∴ Un factor primo es: $x^2 + 1$

CLAVE: D

Resolución 52: El polinomio dado es:

$$F(x; y; z) \equiv x(x^2 + yz) + z(x^2 + y^2) - y^3$$

$$F(x; y; z) \equiv x^3 + xyz + x^2z + y^2z - y^3$$

$$F(x; y; z) \equiv \underbrace{x^3 - y^3} + x^2z + xyz + y^2z$$

Por diferencia de cubos y factor común, tenemos:

$$F(x; y; z) \equiv (x - y)(x^2 + xy + y^2) + z(x^2 + xy + y^2)$$

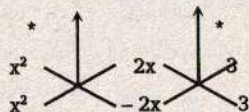
$$F(x; y; z) \equiv (x^2 + xy + y^2)[(x - y) + z]$$

$$\therefore F(x; y; z) \equiv (x^2 + xy + y^2)(x - y + z)$$

CLAVE: B

Resolución 53: De acuerdo con el método del aspa doble especial, tenemos:

$$P(x) \equiv x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x + 9$$



$$P(x) \equiv \underbrace{(x^2 + 2x + 3)}_{f_1} \underbrace{(x^2 - 2x + 3)}_{f_2}$$

En f_1 :

$$\text{Suma} = 1 + 2 + 3 = 6$$

En f_2 :

$$\text{Suma} = 1 - 2 + 3 = 2$$

∴ Una suma de factores primos es 2.

CLAVE: B

Resolución 54: El polinomio dado es: $F(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 3x - 7$

$$F(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 6$$

$$F(x) \equiv (x-1)^3 - 6$$

Observa que: $* F(5-x) \equiv (5-x-1)^3 - 6 \equiv (4-x)^3 - 6$

$$* F(1-\sqrt[3]{9}) \equiv (1-\sqrt[3]{9}-1)^3 - 6 \equiv -9 - 6 = -15$$

Por condición: $P(x) \equiv F(x) + F(5-x) + F(1-\sqrt[3]{9})$

$$P(x) \equiv (x-1)^3 - 6 + (4-x)^3 - 6 - 15$$

$$P(x) \equiv (x-1)^3 + (4-x)^3 - 27$$

$$P(x) \equiv (x-1)^3 + (4-x)^3 + (-3)^3$$

Observa que: $(x-1) + (4-x) - 3 = 0$

Por equivalencia condicional tenemos:

$$(x-1)^3 + (4-x)^3 + (-3)^3 = 3(x-1)(4-x)(-3)$$

$$P(x) \equiv 3(x-1)(4-x)(-3)$$

$$P(x) \equiv 3^2(x-1)(x-4)$$

$\therefore$ Uno de sus factores primos es $(x-1)$.

CLAVE: D

Resolución 55: Factorizando el polinomio dado:

$$J(x; y; z) \equiv x^2 + x - y^2 + y - z^2 - z + 2yz$$

$$J(x; y; z) \equiv x^2 - y^2 + 2yz - z^2 + x + y - z$$

$$J(x; y; z) \equiv x^2 - (y^2 - 2xy + z^2) + x + y - z$$

$$J(x; y; z) \equiv x^2 - (y-z)^2 + x + y - z$$

$$J(x; y; z) \equiv (x+y-z)(x-y+z) + (x+y-z)$$

$$J(x; y; z) \equiv (x+y-z)[(x-y+z) + 1]$$

$$J(x; y; z) \equiv (x+y-z)(x-y+x+1)$$

Entonces:

I. Verdadero

II. Verdadero

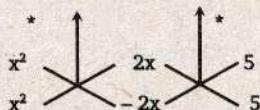
III. Falso

$\therefore$ Secuencia correcta = VVF

CLAVE: A

Resolución 56: Dando uso del aspa doble especial procedemos de la manera siguiente:

$$P(x) \equiv x^4 + 0x^3 + 6x^2 + 0x + 25$$



$$P(x) \equiv (x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x + 5)$$

∴ Un factor primo es: $x^2 + 2x + 5$.

CLAVE: A

Resolución 57: El polinomio dado es: $P(a; b; x; y) \equiv ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)$

$$P(a; b; x; y) \equiv abx^2 - aby^2 + a^2xy - b^2xy$$

Agrupando convenientemente:

$$P(a; b; x; y) \equiv abx^2 + a^2xy - aby^2 - b^2xy$$

$$P(a; b; x; y) \equiv ax(bx + ay) - by(ay + bx)$$

$$P(a; b; x; y) \equiv (ay + bx)(ax - by)$$

∴ N° de factores primos de segundo grado = 2

CLAVE: B

Resolución 58: El polinomio dado es: $P(a; b) \equiv a^4 + b^4 + a^2b^2$

$$P(a; b) \equiv \underbrace{a^4 + b^4 + 2a^2b^2}_{(a^2 + b^2)^2} - a^2b^2$$

$$P(a; b) \equiv (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$$

$$P(a; b) \equiv (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$$

∴ N° de factores primos = 2

CLAVE: A

Resolución 59: El polinomio dado es: $P(a; b) \equiv \underbrace{a^3 + b^3}_{(a+b)(a^2-ab+b^2)} - ab(a+b) - c^2(a+b)$

$$P(a; b) \equiv \underbrace{(a+b)(a^2-ab+b^2)}_{(a+b)} - ab \underbrace{(a+b)}_{(a+b)} - c^2 \underbrace{(a+b)}_{(a+b)}$$

$$P(a; b) \equiv (a+b)[a^2 - ab + b^2 - ab - c^2]$$

$$P(a; b) \equiv (a + b) [a^2 - 2ab + b^2 - c^2]$$

$$P(a; b) \equiv (a + b) [(a - b)^2 - c^2]$$

$$P(a; b) \equiv (a + b) (a - b + c) (a - b - c)$$

Observa que:

$$\Sigma \text{ de factores primos} = (a+b) + (a-b+c) + (a-b-c)$$

$$\therefore \Sigma \text{ de factores primos} = 3a - b$$

CLAVE: E

Resolución 60: El polinomio es:

$$P(x) \equiv x(c^4x - 6 - x) - 9$$

$$P(x) \equiv c^4x^2 - 6x - x^2 - 9$$

$$P(x) \equiv c^4x^2 - (x^2 + 6x + 9)$$

$$P(x) \equiv (c^2x)^2 - (x + 3)^2$$

$$P(x) \equiv \underbrace{(c^2x + x + 3)}_{f_1} \underbrace{(c^2x - x - 3)}_{f_2}$$

$$\text{En } f_1, \text{ si } x = -3:$$

$$\Rightarrow f_1 = -3c^2$$

$$\text{En } f_2, \text{ si } x = -3:$$

$$\Rightarrow f_2 = -3c^2$$

$$\therefore \text{Valor numérico es: } -3c^2$$

CLAVE: D

Resolución 61: Factorizando cada polinomio dado:

$$P(x; y) \equiv 2x^2 + 3xy + y^2 + 0x + y - 2$$

$$\Rightarrow P(x; y) \equiv (2x + y + 2)(x + y - 1)$$

$$Q(x; y) \equiv x^2 + 6xy - y^2 + 6x + 8y - 7$$

$$\Rightarrow Q(x; y) \equiv (x - y + 7)(x + y - 1)$$

Por condición:

$$F(x; y) \equiv 2x + y + 2 + x - y + 7$$

$$F(x; y) \equiv 3x + 9$$

$$\text{Finalmente tenemos: } F(-3; 100) = 3(-3) + 9 = -9 + 9$$

$$\therefore F(-3; 100) = 0$$

CLAVE: B

Resolución 62: El polinomio dado es: $P(x) \equiv x^5 + 2x^4 + 3x^2 + x - 1$

$$P(x) \equiv x^5 + 2x^4 + 2x^2 + x^2 + x - 1$$

$$P(x) \equiv x^5 + 2x^4 - x^2 + x^2 + 2x^2 - x + x^2 + 2x - 1$$

$$P(x) \equiv x^2 (x^2 + 2x - 1) + x (x^2 + 2x - 1) + (x^2 + 2x - 1)$$

$$P(x) \equiv (x^2 + 2x - 1) (x^2 + x + 1)$$

Término lineal

$$\therefore \Sigma \text{ de término lineales} = 3x$$

CLAVE: C

Resolución 63: El polinomio dado es: $P(x) \equiv (x + y) (x + y + 2) (x + y + 1) (x + y + 3) - 8$

$$P(x) \equiv (x + y) [(x + y) + 3] [(x + y) + 2] [(x + y) + 1] - 8$$

$$P(x) \equiv [(x + y)^2 + 3(x + y)] [(x + y)^2 + 3(x + y) + 2] - 8$$

$$P(x) \equiv [(x + y)^2 + 3(x + y)]^2 + 2[(x + y)^2 + 3(x + y)] - 8$$

$$\begin{array}{l} (x + y)^2 + 3(x + y) \quad \nearrow \quad 4 \\ (x + y)^2 + 3(x + y) \quad \searrow \quad -2 \end{array}$$

$$P(x) \equiv [(x + y)^2 + 3(x + y) + 4] [(x + y)^2 + 3(x + y) - 2]$$

$$P(x) \equiv [x^2 + (2y + 3)x + y^2 + 3y + 4] \times$$

$$[x^2 + (2y + 3)x + y^2 + 3y - 2]$$

$\therefore$ Término independiente de un factor primo cuadrático es: $y^2 + 3y + 4$

CLAVE: C

Resolución 64: El polinomio dado es: $R(a; b; c) \equiv a^2 - b^2 - c^2 + 2(a + b - c + bc)$

$$R(a; b; c) \equiv a^2 - b^2 - c^2 + 2(a + b - c) + 2bc$$

$$R(a; b; c) \equiv a^2 - b^2 - c^2 + 2bc + 2(a + b - c)$$

$$R(a; b; c) \equiv a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc) + 2(a + b - c)$$

$$R(a; b; c) \equiv a^2 - (b - c)^2 + 2(a + b - c)$$

$$R(a; b; c) \equiv (a + b - c) (a - b + c) + 2(a + b - c)$$

$$R(a; b; c) \equiv (a + b - c) (a - b + c + 2)$$

$$\therefore \Sigma \text{ de factores primos} = 2a + 2$$

CLAVE: C

Resolución 65: El polinomio dado es: $P(x) \equiv x(x+1)(x^3-7)-6$

$$P(x) \equiv x(x^4 + x^3 - 7x - 7) - 6$$

$$P(x) \equiv x^5 + x^4 - 7x^2 - 7x - 6$$

$$P(x) \equiv \underbrace{x^5 + x^4 + 1}_{*} - 7x^2 - 7x - 7 \dots (1)$$

$$* \quad x^5 + x^4 + 1 + x^2 - x^2 = x^5 - x^2 + x^4 + x^2 + 1$$

$$* \quad x^2(x^3 - 1) + (x^4 + x^2 + 1) = x^2(x - 1)$$

$$(x^2 + x + 1) + (x^4 + x^2 + 1)$$

$$* \quad (x^2 + x + 1)[x^2(x - 1) + x^2 - x + 1] =$$

$$(x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$$

Ahora en (1) tenemos: $P(x) \equiv \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\text{Divisores binómicos}} (x^3 - x + 1) - 7 \underbrace{(x^2 + x + 1)}$

$$P(x) \equiv (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1 - 7)$$

$$P(x) \equiv (x^2 + x + 1)(x^3 - x - 6)$$

Divisores binómicos

$$P(x) \equiv (x^2 + x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 3)$$

$\therefore$ N° de factores primos = 3

CLAVE: B

Resolución 66: El polinomio dado es: $P(a; b; c) \equiv (a + b + c)(ab + ac + bc) - abc$

Por equivalencia adicional:

$$(a+b)(a+c)(b+c) + abc = (a+b+c)(ab+ac+bc)$$

$$\Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) = (a+b+c)(ab+ac+bc) - abc$$

$$\therefore P(a; b; c) \equiv (a + b)(a + c)(b + c)$$

CLAVE: C

Resolución 67: El polinomio dado es: $P(x) \equiv x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$

Según divisores binómicos hagamos $x = 1$:

	1	2	1	-1	-2	-1
1	↓	1	3	4	3	1
	1	3	4	3	1	0

$$P(x) \equiv (x-1)(x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1)$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \uparrow & & \uparrow \\ x^2 & & & 2x & & 1 \\ & \swarrow & & \searrow & \swarrow & \searrow \\ x^2 & & & 2x & & 1 \end{array}$$

$$P(x) \equiv (x-1)(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 1)$$

$$P(x) \equiv (x-1)(x+1)^2(x+1)^2$$

$$P(x) \equiv (x-1)(x+1)^4$$

En $(x-1)$:

$$\Sigma \text{ de coeficientes} = 0$$

En $(x+1)$:

$$\Sigma \text{ de coeficientes} = 2$$

$$\therefore \Sigma \text{ pedida} = 2$$

CLAVE: D

Resolución 68: El polinomio dado es: $P(x, y) \equiv x^2 - y^2 + a^2 - b^2 + 2(ax - by)$

$$P(x, y) \equiv x^2 + a^2 + 2ax - y^2 - b^2 - 2by$$

$$P(x, y) \equiv x^2 + a^2 + 2ax - (y^2 + b^2 + 2by)$$

$$P(x, y) \equiv (x+a)^2 - (y+b)^2$$

$$P(x, y) \equiv (x+a+y+b)(x+a-y-b)$$

$$\therefore \text{Nº de factores lineales} = 2$$

CLAVE: B

Resolución 69: Por condición: $M = 1; N = 2; P = 3; Q = 4 \wedge R = 5$

Factorizando el polinomio dado:

$$A(x, y) \equiv 2x^2 + 5xy + 3y^2 + 3x + 4y + 1$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \uparrow & & \uparrow \\ 2x & & & 3y & & 1 \\ & \swarrow & & \searrow & \swarrow & \searrow \\ x & & & y & & 1 \end{array}$$

$$A(x, y) \equiv \underbrace{(2x + 3y + 1)}_{f_1} \underbrace{(x + y + 1)}_{f_2}$$

En f_1 :

$$\Sigma \text{ de coeficientes} = 6$$

En f_2 :

$$\Sigma \text{ de coeficientes} = 3$$

$$\therefore \text{La suma puede ser: } 6 \vee 3$$

CLAVE: D

Resolución 70: Factorizando cada uno de los polinomios:

$$* P(x) \equiv x^2(x^2 + 3)^2 - (3x^2 + 1)^2$$

$$P(x) \equiv [x(x^2 + 3)]^2 - (3x^2 + 1)^2$$

$$P(x) \equiv (x^3 + 3x)^2 - (3x^2 + 1)^2$$

$$P(x) \equiv (x^3 + 3x + 3x^2 + 1)(x^3 + 3x - 3x^2 - 1)$$

$$P(x) \equiv (x + 1)^3(x - 1)^3$$

$$* Q(x) \equiv x^4 + 2x^2 - 3$$

$$Q(x) \equiv (x^2 + 3)(x^2 - 1)$$

$$Q(x) \equiv (x^2 + 3)(x + 1)(x - 1)$$

Fácilmente podemos reconocer que:

$$\therefore \text{El factor cuadrático común es: } (x+1)(x-1)$$

CLAVE: C

Resolución 71: Sumando y restando "x" tenemos:

$$P(x) \equiv x^7 - x + x^2 + x + 1$$

$$P(x) \equiv x(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$P(x) \equiv x(x^3 + 1)(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$P(x) \equiv x(x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$P(x) \equiv (x^2 + x + 1)[x(x^3 + 1)(x - 1) + 1]$$

$$\therefore P(x) \equiv (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)$$

CLAVE: C

Resolución 72: De acuerdo con el método del aspa múltiple tenemos:

$$P(x) \equiv x^6 - 4x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 16x + 16$$

$$P(x) \equiv (x^3 - 2x - 4)(x^3 - 2x - 4)$$

$$P(x) \equiv (x^3 - 2x - 4)^2$$

* Factoricemos la base según el método de los divisores binómicos:

	1	0	-2	-4
$x = 2$		2	4	4
	1	2	2	0

$$P(x) \equiv [(x-2)(x^2+2x+2)]^2$$

$$P(x) \equiv (x-2)^2 (x^2+2x+2)^2$$

Observa que:

$$\Sigma \text{ de factores primos} = x-2 + x^2 + 2x + 2$$

$$\therefore \Sigma \text{ de factores primos} = x^2 + 3x$$

CLAVE: B

Resolución 73: El polinomio dado puede reescribirse así:

$$P(x) \equiv [(x+2)(2x+3)][(x+3)(2x+1)] - 4$$

$$P(x) \equiv (2x^2+7x+6)(2x^2+7x+3) - 4$$

Supongamos que: $2x^2+7x+3 = m$, luego:

$$P \equiv (m+3)(m) - 4 \equiv m^2 + 3m - 4 \equiv (m+4)(m-1)$$

Reponiendo la variable original:

$$P(x) \equiv (2x^2+7x+3+4)(2x^2+7x+3-1)$$

$$P(x) \equiv (2x^2+7x+7)(2x^2+7x+2)$$

Por condición el factor primo buscado es:

$$2x^2+7x+7$$

$$\therefore \Sigma \text{ de coeficientes} = 16.$$

CLAVE: C

Resolución 74: El polinomio dado es: $P(x, y) \equiv 2x(4x+7y) - 3y(5y+12) + 48x$

Efectuando las operaciones indicadas para luego aplicar un aspa múltiple tenemos:

$$P(x, y) \equiv 8x^2 + 14xy - 15y^2 + 48x - 36y + 0$$

$$P(x, y) \equiv (4x-3y)(2x+5y+12)$$

$$\therefore \text{Término independiente} = 12$$

CLAVE: B

Resolución 75: De acuerdo con la teoría podemos plantear dos divisiones exactas:

$$I. P(x) + (x-2) \Rightarrow R(x) \equiv 0$$

Por el teorema del resto:

$$P(2) = 0$$

$$4 - 2m + n = 0$$

$$n = 2m - 4 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$II. Q(x) + (x-2) \Rightarrow R(x) \equiv 0$$

Por el teorema del resto:

$$Q(2) = 0$$

$$4 + 2n - m = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$4 + 2(2m - 4) - m = 0$$

$$4 + 4m - 8 - m = 0$$

$$3m = 4$$

$$m = \frac{4}{3} \quad \dots\dots\dots (3)$$

Reemplazando (3) en (1):

$$n = 2\left(\frac{4}{3}\right) - 4$$

$$n = \frac{8}{3} - 4$$

$$n = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore m + n = 0$$

CLAVE: A

Resolución 76: Reescribiendo cada uno de los polinomios tenemos:

$$P(x) \equiv (x+2)^3 \cdot (x-2)^3 \cdot (x+2)^{2m-2} \cdot (x+5)$$

$$\Rightarrow P(x) \equiv (x+2)^{2m+1} \cdot (x-2)^3 \cdot (x+5)$$

$$Q(x) \equiv (x+2)^2 \cdot (x-2)^2 \cdot (x-2)^{n-1} \cdot (x+7)$$

$$\Rightarrow Q(x) \equiv (x+2)^2 \cdot (x-2)^{n+1} \cdot (x+7)$$

Según la teoría: $MCM(P, Q) \equiv (x+2)^{2m+1} \cdot (x-2)^{n+1} \cdot (x+5) \cdot (x+7)$

Por condición se plantea que:

$$2m + 1 = 3 \wedge n + 1 = 3$$

$$m = 1 \quad \wedge \quad n = 2$$

Finalmente tenemos que:

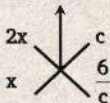
$$m + n = 1 + 2$$

$$\therefore m + n = 3$$

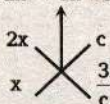
CLAVE: B

Resolución 77: De acuerdo con la condición procedemos a factorizar cada polinomio dado según la regla del aspa simple, veamos:

$$P(x) \equiv 2x^2 + ax + 6 \equiv (2x + c) \left(x + \frac{6}{c} \right)$$



$$Q(x) \equiv 2x^2 + bx + 3 \equiv (2x + c) \left(x + \frac{3}{c} \right)$$



Fácilmente podemos reconocer que "c" asume dos valores:

$$c = 1 \vee c = 3$$

$$\text{Si: } c = 1 \Rightarrow a = 13 \wedge b = 7: (a - b)c = 6$$

$$\text{Si: } c = 3 \Rightarrow a = 7 \wedge b = 5: (a - b)c = 6$$

$$\therefore (a - b)c = 6$$

CLAVE: E

Resolución 78: El polinomio dado es: $P(x) \equiv x^3 + 2x^2 - 2x - 1$

Según la regla de los divisores binómicos hacemos: $x = 1$

	1	2	-2	-1
1	↓	1	3	1
	1	3	1	0

$$P(x) \equiv (x-1)(x^2 + 3x + 1)$$

Finalmente tenemos: N° de factores $= (1+1) \times (1+1) = (2) \times (2)$

$$\therefore N^{\circ} \text{ de factores} = 4$$

CLAVE: D

Resolución 79: Reescribiendo los términos del polinomio en una forma conveniente para poder agrupar cada tres términos:

$$P(x) \equiv x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

$$P(x) \equiv x^5 + x^4 + x^3 + x^3 + x^2 + x^2 + x + x + 1$$

$$P(x) \equiv (x^5 + x^4 + x^3) + (x^3 + x^2 + x) + (x^2 + x + 1)$$

$$P(x) \equiv x^3(x^2 + x + 1) + x(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$\therefore P(x) \equiv (x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1)$$

CLAVE: C

Resolución 80: El polinomio dado es: $P(a; b; c) \equiv a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 8abc$

$$P(a; b; c) \equiv a(b^2 + c^2 - 2bc) + b(c^2 + a^2 - 2ac) + c(a^2 + b^2 - 2ab) + 8abc$$

$$P(a; b; c) \equiv ab^2 + ac^2 - 2abc + bc^2 + a^2b - 2abc + a^2c + b^2c - 2abc + 8abc$$

$$P(a; b; c) \equiv \overbrace{ab^2} + \overbrace{ac^2} + \overbrace{bc^2} + \overbrace{a^2b} + \overbrace{a^2c} + \overbrace{b^2c} + \overbrace{2abc}$$

$$P(a; b; c) \equiv \overbrace{ab} (a+b) + \overbrace{c^2} (a+b) + \overbrace{c} (a^2 + b^2 + 2ab)$$

$$P(a; b; c) \equiv \overbrace{(ab + c^2)} (a+b) + \overbrace{c} (a+b)^2$$

$$P(a; b; c) \equiv (a+b) [ab + c^2 + c(a+b)]$$

$$P(a; b; c) \equiv (a+b) \overbrace{(ab + c^2 + ac + bc)}$$

$$P(a; b; c) \equiv (a+b) \overbrace{[a(b+c) + c(b+c)]}$$

$$\therefore P(a; b; c) \equiv (a+b)(b+c)(a+c)$$

CLAVE: D

Resolución 81: El polinomio dado es: $P(x; y; z) \equiv x^4 - y^4 - z^4 - 2x^2yz - y^2z^2$
 $P(x; y; z) \equiv x^4 - y^4 - z^4 - 2x^2yz - 2y^2z^2 + y^2z^2$

Agrupando convenientemente:

$$\begin{aligned} P(x; y; z) &\equiv x^4 - 2x^2yz + y^2z^2 - y^4 - z^4 - 2y^2z^2 \\ P(x; y; z) &\equiv (x^2 - yz)^2 - (y^2 + z^2)^2 \\ P(x; y; z) &\equiv [(x^2 - yz) + (y^2 + z^2)] [(x^2 - yz) - (y^2 + z^2)] \\ \therefore P(x; y; z) &\equiv (x^2 - yz + y^2 + z^2) (x^2 - yz - y^2 - z^2) \end{aligned}$$

CLAVE: B

Resolución 82: El polinomio dado es: $P(x; y; z) \equiv 5(x + y)^2 - 5(y - z)^2 - (x + z)^2$
 $P(x; y; z) \equiv 5[(x + y)^2 - (y - z)^2] - (x + z)^2$

Dando uso de la diferencia de cuadrados:

$$P(x; y; z) \equiv 5(x + 2y - z)(x + z) - (x + z)^2$$

Extrayendo el factor común tenemos:

$$\begin{aligned} P(x; y; z) &\equiv (x + z) [5(x + 2y - z) - (x + z)] \\ P(x; y; z) &\equiv (x + z) (5x + 10y - 5z - x - z) \\ P(x; y; z) &\equiv (x + z) (4x + 10y - 6z) \\ \therefore P(x; y; z) &\equiv 2(x + z) (2x + 5y - 3z) \end{aligned}$$

CLAVE: C

Resolución 83: Con la finalidad de calcular los valores de m, n, a, b y c planteamos las divisiones exactas.

I. $P(x) \div (x^2 - 2x + 1)$

Según el método de Horner:

1	1	1	m	n
2		2	-1	
-1			6	-3
	1	3	0	0

En el residuo se cumple que:

$$m - 1 + 6 = 0 \wedge n - 3 = 0$$

$$m = -5 \wedge n = 3$$

Además: $P(x) \equiv (x^2 - 2x + 1)(x + 3)$

$$P(x) \equiv (x - 1)^2(x + 3)$$

II. $Q(x) \div (x^2 - 2x + 1)$

Según el método de Horner:

1	1	a	b	c
2		2	-1	
-1			2a + 4	-(a + 2)
	1	a + 2	0	0

En el residuo se cumple que:

$$b - 1 + 2a + 4 = 0 \wedge c - (a + 2) = 0$$

$$b = -2a - 3 \quad \wedge \quad c = a + 2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

Además: $Q(x) \equiv (x^2 - 2x + 1)(x + a + 2)$

Como $a \notin \{1; -3\}$, aquí reconocemos que:

$$\text{MCM}(P, Q) \equiv (x - 1)^2(x + 3)(x + a + 2)$$

Por condición hacemos $x = -4$ y obtenemos:

$$(-4 - 1)^2(-4 + 3)(-4 + a + 2) = -75$$

$$25(-1)(a - 2) = -75$$

$$a - 2 = 3$$

$$a = 5 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) obtenemos:

$$b = -10 - 3 \wedge c = 5 + 2$$

$$b = -13 \quad \wedge \quad c = 7$$

Finalmente tenemos: $mn + abc = (-5)(3) + (5)(-13)(7)$

$$mn + abc = -15 - 455$$

$$\therefore mn + abc = -470$$

CLAVE: E

Resolución 84: Factorizando cada uno de los polinomios dados:

$$P(x) = (x-2)(x^3 + x^2 + 3x + 3)$$

$$P(x) = (x-2)[x^2(x+1) + 3(x+1)]$$

$$\Rightarrow P(x) = (x-2)(x+1)(x^2+3)$$

$$Q(x) = (x^2+1)(x^3+3x^2+3x+9)$$

$$Q(x) = (x^2+1)[x^2(x+3) + 3(x+3)]$$

$$\Rightarrow Q(x) = (x^2+1)(x+3)(x^2+3)$$

De acuerdo con la teoría reconocemos que:

$$\text{MCM}(P, Q) = (x-2)(x+1)(x^2+3)(x^2+1)(x+3)$$

Por condición tenemos:

$$\text{MCM}(P, Q) = (ax-2)(x+1)(x^2+b)(cx^2+1)(dx+3)$$

Fácilmente reconocemos que:

$$a = 1 \wedge b = 3 \wedge c = 1 \wedge d = 1$$

$$\therefore abcd = 3$$

CLAVE: C

Resolución 85: Por divisores binómicos:

$$TI = 6 \wedge CP = 2$$

$$PC = \pm \left\{ \frac{1; 2; 3; 6}{1; 2} \right\} = \pm \left\{ 1; \frac{1}{2}; 2; 3; \frac{3}{2}; 6 \right\}$$

Para: $x = -\frac{1}{2}$

	2	11	17	6
$-\frac{1}{2}$	↓	-1	-5	-6
	2	10	12	0

$$+2: 1 \ 5 \ 6$$

$$P(x) = (2x+1)(x^2+5x+6)$$

$$\text{Observa que: } x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)$$

$$\begin{array}{c} x \\ x \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \downarrow \\ 2 \end{array}$$

$$P(x) = (2x+1)(x+3)(x+2)$$

- I. Presenta tres factores primos lineales.
- II. Presenta tres factores cuadráticos, los cuales se obtienen multiplicando dos a dos los factores de primer grado.
- III. $(x+6)$ no es un factor

$\therefore$ Finalmente la sentencia será: FVF

CLAVE: D

Resolución 86: Por divisores binómicos:

$$TI = -4 \wedge CP = 2$$

$$PC = \pm \left\{ \frac{1; 2; 4}{1; 2} \right\} = \pm \left\{ 1; \frac{1}{2}; 2; 4 \right\}$$

Para: $x = 1$

	2	-1	-10	5	8	-4
1	↓	2	1	-9	-4	4
	2	1	-9	-4	4	0

$$P(x) \equiv (x-1)(2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4)$$

Aspa Doble Especial

$$P(x) \equiv 2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4$$

$$P(x) \equiv (x-1)(2x^2 + x - 1)(x^2 - 4)$$

Observa que:

$$2x^2 + x - 1 \equiv (2x-1)(x+1) \wedge x^2 - 4 \equiv (x+2)(x-2)$$

$$\therefore P(x) \equiv (x-1)(2x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$$

CLAVE: E**Resolución 87:** Factoricemos al polinomio dado por artificio:

$$P(x) \equiv (x+2)(x+3)(x-4)(x-5) - 18$$

$$P(x) \equiv [(x+2)(x-4)][(x+3)(x-5)] - 18$$

$$P(x) \equiv [x^2 - 2x - 8][x^2 - 2x - 15] - 18$$

Hagamos:

$$x^2 - 2x - 8 = m \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = m - 7$$

$$P \equiv m(m-7) - 18 \equiv m^2 - 7m - 18$$

$$P \equiv m^2 - 7m - 18 \equiv (m-9)(m+2)$$

$$P(x) \equiv (x^2 - 2x - 8 - 9)(x^2 - 2x - 8 + 2)$$

$$\therefore P(x) \equiv (x^2 - 2x - 17)(x^2 - 2x - 6)$$

CLAVE: D

Resolución 88: Sumando y restando x^2 para obtener una diferencia de cubos:

$$P(x) \equiv x^5 - x^2 + x^4 + x^2 + 1$$

$$P(x) \equiv x^2(x^3 - 1) + \underbrace{(x^4 + x^2 + 1)}_{\text{Argand}}$$

$$P(x) \equiv x^2(x-1)(x^2+x+1) + (x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

$$P(x) \equiv (x^2+x+1)[x^2(x-1) + x^2-x+1]$$

$$P(x) \equiv (x^2+x+1)(x^3-x^2+x^2-x+1)$$

$$\therefore P(x) \equiv (x^2+x+1)(x^3-x+1)$$

CLAVE: D

Resolución 89: El polinomio dado es: $P(x) \equiv x^7 + \underbrace{2x^4}_{x^4+x^4} + x^2 + 1$

$$P(x) \equiv x^7 + x^4 + x^4 + x^2 + 1$$

$$P(x) \equiv x^4(x^3 + 1) + (x^4 + x^2 + 1)$$

$$P(x) \equiv x^4(x+1)(x^2-x+1) + (x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

$$P(x) \equiv (x^2-x+1)[x^4(x+1) + x^2+x+1]$$

$$P(x) \equiv (x^2-x+1)(x^5+x^4+x^2+x+1)$$

Para $x^2 - x + 1$: Coef Term Lineal = -1

Para $x^5+x^4+x^2+x+1$: Coef Term Lineal = 1

$$\therefore \text{Puede ser } 1 \text{ ó } -1$$

CLAVE: E

Resolución 90: Según la definición: $\text{MCD}(M; N; F) \equiv x^a \cdot y^b \cdot z^{c-4} \dots\dots (I)$

$$\text{MCM}(M; N; F) \equiv x^{a-1} y^b z^{c+2} \dots\dots (II)$$

Por condición: $\text{MCD}(M; N; F) \equiv x^6 y^8 \dots\dots (III)$

De (I) y (III) tenemos: $a - 3 = 6$; $b + 1 = 8$; $c - 4 = 0$

$$a = 9$$
 ; $b = 7$; $c = 4$

Finalmente en (II):

$$\therefore \text{MCM}(M; N; F) \equiv x^8 y^{10} z^6$$

CLAVE: C

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 04

Resolución 91: Por propiedad del MCD, se plantean dos divisiones exactas:

I. $\frac{16x^3 - 4x^2 + 6x + m}{4x^2 - 2x + 2}$ por el método de Horner

4	16	-4	6	m
2		8	-8	
-2			2	-2
	4	1	0	0

En el residuo: $m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$

II. $\frac{8x^3 + 4x^2 + n}{4x^2 - 2x + 2}$ por el método de Horner

4	8	4	0	n
2		4	-4	
-2			4	-4
	2	2	0	0

En el residuo: $n - 4 = 0 \Rightarrow n = 4$

$\therefore m + n = 6$

CLAVE: B

Resolución 92: Sean los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, luego por propiedad se tiene:

$$P \cdot Q \equiv \text{MCD}(P \wedge Q) \cdot \text{MCM}(P \wedge Q)$$

Por condición: $\text{MCD}(P \wedge Q) \cdot \text{MCM}(P \wedge Q) \equiv (x^2 - 1)^2 \dots\dots\dots \text{(I)}$

$$\frac{\text{MCM}(P \wedge Q)}{\text{MCD}(P \wedge Q)} \equiv (x - 1)^2 \dots\dots\dots \text{(II)}$$

Efectuando (I) $\div$ (II): $\frac{\text{MCD}(P \wedge Q) \cdot \text{MCM}(P \wedge Q)}{\text{MCM}(P \wedge Q)} \equiv \frac{(x^2 - 1)^2}{(x - 1)^2}$

$$\frac{[\text{MCD}(P \wedge Q)]^2 \cdot \text{MCM}(P \wedge Q)}{\text{MCM}(P \wedge Q)} \equiv \frac{[(x - 1)(x + 1)]^2}{(x - 1)^2}$$

$$[\text{MCD}(P \wedge Q)]^2 \equiv \frac{(x - 1)^2 (x + 1)^2}{(x - 1)^2} \equiv (x + 1)^2$$

$\therefore \text{MCD}(P \wedge Q) \equiv x + 1 \vee \text{MCD}(P \wedge Q) \equiv -x - 1$

CLAVE: A

Resolución 93: El polinomio dado es: $P(x; y; z) \equiv x^2y(y + xz) + y^2z(z + xy) + xz^2(x + yz) + xyz(xyz + 1)$

$$P(x; y; z) \equiv x^2y^2 + x^3yz + y^2z^2 + xy^3z + x^2z^2 + xyz^3 + x^2y^2z^2 + xyz$$

Agrupando dos a dos: $P(x; y; z) \equiv (x^2y^2 + xyz) + (x^3yz + x^2z^2) + (y^2z^2 + xy^3z) + (xyz^3 + x^2y^2z^2)$

$$P(x; y; z) \equiv xy(xy + z) + x^2z(xy + z) + y^2z(z + xy) + xyz^2(z + xy)$$

Por factor común: $P(x; y; z) \equiv (xy + z)[xy + x^2z + y^2z + xyz^2]$

Agrupando dos a dos en el corchete:

$$P(x; y; z) \equiv (xy + z)[(xy + x^2z) + (y^2z + xyz^2)]$$

$$P(x; y; z) \equiv (xy + z)[x(y + xz) + yz(y + xz)]$$

$$\therefore P(x; y; z) \equiv (xy + z)(y + xz)(x + yz)$$

CLAVE: C

Resolución 94: El polinomio dado es: $P(x; y) \equiv x^3 + x^2y - x - y^3 - xy^2 + y$

Agrupando de dos en dos:

$$P(x; y) \equiv (x^3 - y^3) + (x^2y - xy^2) + (-x + y)$$

$$P(x; y) \equiv (x - y)(x^2 + xy + y^2) + xy(x - y) - (x - y)$$

Por factor común: $P(x; y) \equiv (x - y)[x^2 + \overbrace{xy + y^2}^{xy + y^2} - 1]$

$$P(x; y) \equiv (x - y)[x^2 + \underbrace{2xy + y^2}_{(x + y)^2} - 1]$$

Por equivalencia: $P(x; y) \equiv (x - y)[(x + y)^2 - 12]$

$$P(x; y) \equiv (x - y)(x + y + 1)(x + y - 1)$$

$$\therefore N^o \text{ Fact} = (2)(2)(2) = 8$$

CLAVE: E

Resolución 95: Por definición de factor, la siguiente división:

$$\frac{x^4 + x^3 + 6x^2 + mx + n}{x^2 + 2x + 3}$$

Debe ser exacta, luego por el método de Horner se tendrá:

1	1	1	6	m	n
-2		-2	-3		
-3			2	3	
				-10	-15
	1	-1	5	0	0

En el residuo tenemos: $m + 3 - 10 = 0 \wedge n - 15 = 0$

$$\therefore m = 7 \wedge n = 15$$

CLAVE: E

Resolución 96: Agrupando de dos en dos tenemos:

$$P(x; y) \equiv (x^5 - x^4y) + (-2x^3y^2 + 2x^2y^3) + (xy^4 - y^5)$$

$$P(x; y) \equiv x^4(x - y) - 2x^2y^2(x - y) + y^4(x - y)$$

Por factor común: $P(x; y) \equiv (x - y)[x^4 - 2x^2y^2 + y^4]$

Por equivalencia: $P(x; y) \equiv (x - y)[x^2 - y^2]^2 \equiv (x - y)[(x + y)(x - y)]^2$

$$P(x; y) \equiv (x - y)(x + y)^2(x - y)^2$$

$$\therefore P(x; y) \equiv (x - y)^3(x + y)^2$$

CLAVE: C

Resolución 97: Por aspa simple:

$$P(w; x; y; z) \equiv (w + z)^4 - 2(x^2 + y^2)(w + z)^2 + (x^2 - y^2)^2$$

$$P(w; x; y; z) \equiv (w + z)^4 - 2(x^2 + y^2)(w + z)^2 + (x + y)^2 \cdot (x - y)^2$$

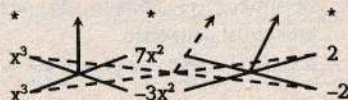
$$P(w; x; y; z) \equiv [(w + z)^2 - (x + y)^2][(w + z)^2 - (x - y)^2]$$

Por equivalencia: $P(w; x; y; z) \equiv (w + z + x + y)(w + z - x + y) \cdot (w + z + x - y)(w + z - x - y)$

$$\therefore N^{\circ} \text{ FP} = 4$$

CLAVE: B

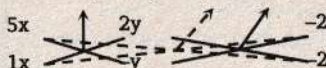
FACTORIZACIÓN - FRACCIONES ALGEBRAICAS

Resolución 98: El polinomio dado es: $P(x) \equiv x^6 + 4x^5 - 21x^4 - 20x^2 - 4$ Por aspa doble: $P(x) \equiv x^6 + 4x^5 - 21x^4 + 0x^3 - 20x^2 - 4$ 

$$P(x) \equiv (x^3 + 7x^2 + 2)(x^3 - 3x^2 - 2)$$

Para $(x^3 + 7x^2 + 2)$: $\Sigma \text{Coef} = 1 + 7 + 2 = 10$ Para $(x^3 - 3x^2 - 2)$: $\Sigma \text{Coef} = 1 - 3 - 2 = -4$ **CLAVE: C****Resolución 99:** Observamos en el esquema lo siguiente:

$$5x^2 - 3xy - 2y^2 + mx - 2y + n$$



Entonces:

$$a = 1 ; b = 2 ; c = -2 ; m = -12 ; n = 4$$

Como piden:

$$T = (a + m + n)^{b+c} = (1 - 12 + 4)^{2-2} = (-7)^0$$

$$\therefore T = (a + m + n)^{b+c} = 1$$

CLAVE: A**Resolución 100:** Por divisiones sucesivas según Ruffini:

	1	4	0	-10	-1	6
1	↓	1	5	5	-5	-6
	1	5	5	-5	-6	0
1	↓	1	6	11	6	
	1	6	11	6	0	
-1	↓	-1	-5	-6		
	1	5	6	0		
-2	↓	-2	-6			
	1	3	0			

$$P(x) \equiv (x - 1)(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

$$P(x) \equiv (x - 1)^2(x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

$$\therefore N^{\circ} \text{ FP} = 4$$

CLAVE: D



PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Determinar el número de factores primos del polinomio

$$P(x; y; z) \equiv x^3y^2 + x^2yz + x^2yw + xzw$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

2. Un factor primo de:

$$P(x) \equiv (x-1)^2 + (x-2)(x^2-1) - 3x + 3$$

Es:

- A) $x-1$ B) $x+3$ C) $x-3$
D) x^2+6 E) $x+1$

3. Factorizar:

$$F(x; y) \equiv ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)$$

- A) $(ax-by)(ay+bx)$
B) $(ax+by)(ay+bx)$
C) $(ax-by)(ay-bx)$
D) $(a+b)^2(x+y)^2$
E) $ab(x+y)^2$

4. Luego de factorizar al polinomio:

$$P(a; b) \equiv a^2 - 4 + 2ab + b^2$$

Indicar el factor primo de mayor suma de coeficientes.

- A) $a+b+2$ B) $a+b-2$
C) $a+b+5$
D) $a+b+1$ E) $a-b+8$

5. Un factor primo del polinomio:

$$P(x; y) \equiv x^4y + 2x^3y^2 + xy^4 + 2x^2y^3 \text{ es:}$$

- A) $x^2 - xy + y^2$
B) $x + xy + y^2$
C) $x^2 - xy + y$
D) $x^2 + xy + y^2$
E) $x - y$

6. Luego de factorizar al polinomio:

$$F(x; y) \equiv x^{a+b} + (xy)^a + (xy)^b + y^{a-b}$$

Indicar la suma de los exponentes de las variables de sus factores primos.

- A) $2a+b$ B) $a+2b$ C) $a+b$
D) $2a+2b$ E) $3a+3b$

7. Un factor primo del polinomio:

$$P(x) \equiv x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \text{ es:}$$

- A) $1-x$ B) $1-x^2$
C) $1-x^4$
D) $1+x+x^2$ E) $1+x^4$

8. Si la suma de todos los factores primos del polinomio: $P(x) \equiv x^3 + x^2 - 4x - 4$ se iguala con 22. ¿Cuál es el valor de x ?

- A) 3 B) 5 C) 7
D) 2 E) 4

9. Luego de factorizar al polinomio:

$$P(x; y) \equiv 54x^5y^2 - 38x^3y^2 - 16y^2$$

Indicar la suma de coeficientes de los factores primos cuadráticos.

- A) 3 B) 9 C) 5
D) 8 E) 10

10. Un factor primo del polinomio:

$$P(x) \equiv (x^2 - x + 1)^2 - 10x(x-1) + 11$$

- A) $x+2$ B) x^2-x-2
C) x^2-x-6
D) $x+11$ E) $x+3$

11. La suma de los términos independientes de x en los factores primos de:

$$F(x) \equiv (a+1)x^2 - (a^2-1)x - a^2 - a; \text{ es}$$

- A) 2 B) $2-a$ C) $1-a$
D) 1 E) $a+1$

12. Luego de factorizar al polinomio:

$$P(x) \equiv x(x+1)(x+2)(x+3) + 1$$

Indicar la suma de coeficientes de un factor primo.

- A) 0 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

13. Luego de factorizar al polinomio:

$$P(x) \equiv (x^2+6)^2 + 3x(x^2+6) - 10x^2$$

Indicar al factor primo cuadrático.

- A) $-x^2-2x+6$ B) x^2+2x+6
C) x^2+5x+5
D) x^2-5x+6 E) x^2+3

14. Un factor primo del polinomio:

$$F(x) \equiv (2x^2-3x)^2 - 14(2x^2-3x) + 45 \text{ es:}$$

- A) $2x-1$ B) $2x-3$ C) $2x+5$
D) $2x+1$ E) $2x+3$

15. Luego de factorizar al polinomio:

$$P(x) \equiv x^3 - 4x^2 - 17x + 60$$

Indicar la suma de sus factores primos.

- A) $4x+1$ B) $3x-2$ C) $3x-4$
D) $3x-5$ E) $3x+4$

16. Uno de los factores primos del polinomio: $F(x) \equiv 9x^3 - 3x^2 - 5x + 2$ es:

- A) $x-2$ B) $3x-2$ C) $3x+1$
D) $9x-1$ E) $x+2$

17. Reconocer uno de los factores primos del polinomio:

$$P(x) \equiv x^5 - 3x^4 - 9x^3 + 22x^2 + 4x - 24$$

- A) $x+2$ B) $x-1$ C) $x+3$
D) $x+8$ E) $x-7$

18. Indicar la suma de todos los factores primos del polinomio:

$$P(x) \equiv x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$$

- A) 10 B) 1 C) 3
D) 4 E) 5

19. ¿Cuántos factores primos presenta el polinomio: $F(x) \equiv 81x^4 + 4$?

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

20. Reconocer uno de los factores primos del polinomio: $P(x) \equiv 3x^4 + x^2 + 2x + 1$

$$P(x) \equiv x^5 + (x^2 + 1)^2$$

- A) -1 B) 0 C) 3
D) 4 E) 5

21. Reconocer uno de los factores primos del polinomio:

$$P(x) \equiv x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$$

- A) x^2-x+1 B) $x+1$
C) x^2+x+2
D) x^2-x-1 E) x^2-x+2

22. Respecto a
- $F(a) \equiv a(x+a)(x^2-ax+a^2)$

Marque correcto (c) o incorrecto (i) según corresponda en:

- () El término independiente de un factor primo es "a".
 () La suma de coeficientes de un factor primo es " $x + 1$ ".
 () Solo admite un factor primo lineal.

- A) cci B) iic C) icc
 D) cic E) ici

23. Si luego de factorizar:

$$F(x) = 25x^2 - 97x - 12$$

Se obtiene como suma de factores primos a $(mx + n)$. Calcular:

$$T = m^n + n^m$$

- A) 26/27 B) 27/26 C) 25/24
 D) 24/25 E) 3/4

24. Halle el valor numérico de un factor primo de
- $Q(x)$
- para
- $x = -1$
- si:

$$Q(x) \equiv (x+3)^2 + (x-3)^2 - 13x$$

- A) 11 B) -11 C) 3
 D) -3 E) $B \vee D$

25. Indicar el número de factores primos del polinomio:

$$P(x; y) \equiv xy^6 - 5x^2y^5 - 4x^3y^4 + 20x^4y^3$$

- A) 10 B) 2 C) 3
 D) 5 E) 4

26. Mostrar uno de los factores del siguiente polinomio:

$$P(x; y; z) \equiv x(x^2 - y^2 + xz) - y^2z$$

- A) $y + z$ B) $x + 1$ C) $y - 1$
 D) $x + z$ E) $y - z$

27. Si luego de factorizar:

$$E(x; y) \equiv (x-1)(x^2+x+1) + (1-y)(1+y+y^2);$$

a un factor primo se le agrega $-3xy$, se obtiene:

- A) $(x+y)^2$ B) $(x-y)$
 C) $(x+2y)^2$
 D) $(x-y)^2$ E) $(x-2y)^2$

28. Determinar el número de factores primos del polinomio:

$$P(a; b) \equiv a^3 - ab^2 + a^2b - b^3 + a^2 - b^2$$

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5

29. Sea:
- $F(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$

Determine la suma de los factores primos de $P(x) = F(-x)$

- A) $3(x+2)$ B) $3(x-2)$
 C) $3x+5$
 D) $3x-5$ E) $3x+4$

30. Indicar el número de factores primos lineales de:

$$P(x; y; z) \equiv (xz - 3y)^2 - (xy - 3z)^2$$

- A) 1
 B) 2
 C) 3
 D) 4
 E) No existen tales factores

31. Calcular la suma de los factores primos del polinomio:

$$P(x) \equiv x^7 + x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + x + 1$$

- A) $3x+1$ B) $3x-1$
 C) x^2+2
 D) x^2-3x+1 E) x^2+2x+1

32. ¿Cuántos factores primos presenta el polinomio: $P(x) \equiv 20x^4 + 31x^2 - 9$?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

33. Determinar la suma de los factores primos del polinomio:

$$P(x; y; z) \equiv x^2 + x - y^2 + y - z^2 - z + 2yz$$

A) $2x + 1$ B) $x + y + z$
C) $x + 2y + z$
D) $x - y - z$ E) x

34. Indicar la suma de los factores primos de: $P(x; y; w; z) \equiv w^2 - z^2 + x^2 - y^2 + 2wx - 2yz$

A) $2(w + y)$ B) $2(x + z)$
C) $2(w + x)$
D) $2(w - x)$ E) $2(z - y)$

35. Mostrar un factor de:

$$P(x; y) \equiv 64x^{12}y^3 - 68x^8y^7 + 4x^4y^{11}$$

A) $x^2 + 1$ B) $y^2 + 1$ C) $x^2 + y^2$
D) $2x - 1$ E) $2y + 1$

36. Reconocer al factor simple de:

$$P(x; y) \equiv (x+y)^2(x-y+1) + (y-x)^2(y-x-1)$$

A) $x + y$ B) $x - y$
C) $x - y + 1$
D) $x - y - 1$ E) $x^2 + y^2$

37. Reconocer un factor de:

$$P(x; y) \equiv x^5y^2 - x^3 - x^4y^3 + x^2y + x^2y^5 - y^3 - x^3y^4 + xy^2$$

A) $x^2 - y$ B) $x - y^2$ C) $x^2 - 1$
D) $xy - 1$ E) $y^2 + 1$

38. Mostrar uno de los factores primos del polinomio:

$$P(m; n) \equiv m(m^2 + mn - 1) - n(n^2 + mn - 1)$$

A) $m + n$ B) $n - 1$
C) $m - 1$
D) $m + n - 1$ E) $m^2 + 1$

39. Reconocer un factor primo del polinomio:

$$P(x; y) \equiv x(x - 2y)^3 + y(2x - y)^3$$

A) $x + 2y$
B) $2x + y$
C) $x - y$
D) $x + y$
E) Más de una es correcta

40. Indicar un factor primo de:

$$P(x; y) \equiv (x + y)^3 + 3xy(1 - x - y) - 1$$

A) $x - y - 1$ B) $x + y + 1$
C) $x - y + 1$
D) $x + y - 1$ E) $x^2 - xy + y^2$

41. Determinar la suma de los términos lineales de los factores primos del siguiente polinomio:

$$P(x) \equiv (x+1)(x+3)(x-5)(x-7) + 28$$

A) $-6x$ B) $-8x$ C) $-10x$
D) $4x$ E) $6x$

42. Determinar el número de factores primos de: $P(x) \equiv x^4 - 13x^2 + 36$

A) 4 B) 8 C) 16
D) 32 E) 2

43. Indicar el número de factores primos del polinomio: $P(x) \equiv x^{16} + 15x^8 - 16$

A) 4 B) 6 C) 5
D) 9 E) 16

44. Mostrar el MCD de los polinomios:

$$P(x) \equiv x^4 - 1; Q(x) \equiv x^2 - 3x + 2$$

A) $x + 1$ B) $x - 1$ C) $x^2 + 1$
D) $x - 2$ E) $x + 2$

45. Determinar el MCM de los polinomios:

$$P(x) \equiv x^2 - 4x + 3$$

$$Q(x) \equiv x^2 + 4x + 3$$

$$F(x) \equiv x^4 - 10x^2 + 9$$

$$R(x) \equiv x^3 + x^2 - 9x - 9$$

A) $(x^2 - 9)(x^4 - 1)$
B) $(x^2 - 9)(x^2 - 1)$
C) $(x^2 - 9)(x + 1)$
D) $(x^2 - 9)(x^2 + 1)$
E) $(x^2 + 9)(x^2 + 1)$

46. COLUMNA (A)

El valor numérico del MCD de los polinomios:

$$P(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 3x - 1; Q(x) \equiv x^3 - x;$$

sabiendo que $x \in \mathbb{R}^+$

COLUMNA (B)

El valor numérico del MCD de los polinomios:

$$R(x) \equiv x^3 - 2x + 1; M(x) \equiv x^2 - 4x + 3;$$

sabiendo que $x \in \mathbb{R}^+$

A) A es mayor que B
B) A es menor que B
C) A es igual que B
D) ¡No utilizar esta opción!
E) No se puede determinar

47. Determinar la suma de los coeficientes del factor primo de menor grado del siguiente polinomio:

$$P(x) \equiv x^5 + x^4 + 1$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

48. Determinar el número de factores primos de:

$$P(x; y) \equiv (x+y)^2(x^2 - y^2)^2 - (x-y)^2(x^2 + y^2)^2$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

49. Si: $x^4 + 4 \equiv (x^2 + mx + p)(x^2 + nx + q)$
Calcular: $m^n \cdot p^q$, siendo: $n < 0$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

50. Indicar el número de factores primos de: $x^3yz + 2x^2y^2z - x^2yz^2 + xy^3z - xy^2z^2$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

51. Un factor de: $P(x) \equiv (x^6 - 1)(x^4 - x^2 + 1) - 3x^2(x^3 + x^2)(x - 1)$ es:

A) $x + 1$
B) $x - 1$
C) $x^2 - 1$
D) $x^2 + 1$
E) Todas las anteriores

52. Indicar un factor primo de:

$$x^3 + y^3 + z^3 + x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2)$$

A) $x + y + z$
B) $xy + xz + yz$
C) $x^2 + y^2 + z^2$
D) $x^2 + yz$
E) Más de una es correcta

53. Indicar el número de factores primos de:

$$P(x;y) \equiv (x^4 + x^2y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)^2 - x^4y^4$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

54. Determinar el número de factores primos del polinomio:

$$P(a;b) \equiv a^{10} - b^2a^2 + a^9b - ab^9 + a^8b^2 - b^{10}$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

55. Un factor de:

$$P(x;y;z;w) \equiv w^2x^2 - 8wzx + 16z^2 - 25y^2$$

- A) $wx - 4z + y$ B) $wx - z + 5y$
C) $x + wz$
D) $wx - 4z + 5y$ E) $wx + 4z - 5y$

56. Luego de factorizar en $\mathbb{Z}$ al polinomio:

$$P(x) \equiv x^8 + x^4 + x^2 - 1$$

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Tiene un factor primo cuadrático
II. Tiene sólo dos factores primos
III. Tiene dos factores cúbicos

- A) VFF B) VFV C) FFF
D) VVF E) VVV

57. Un factor de:

$$P(x) \equiv 2x^6 + x^5 - 6x^4 + 7x^2 - 2$$

- A) $(x^2 + 1)^2$ B) $x - 1$
C) $x^2 + x + 1$
D) $2x^3 - 3x^2 + 2$ E) $x^2 - x - 1$

58. Un factor de:

$$P(x;y) \equiv 10x^4 - 17x^2y - 20y^2 + 13x^2 + 17y - 3$$

- A) $5x^2 - xy + 1$ B) $5x^2 - 4y + 3$
C) $5x^2 + 4y - 1$
D) $2x^2 - 4y - 1$ E) $x^2 - y - 3$

59. Reconocer a uno de los factores primos cuadráticos de:

$$P(x) \equiv x^8 - 4x^6 - x^2 + 4$$

- A) $x^2 + 1$ B) $x^2 - x - 1$
C) $x^2 + 2$
D) $x^2 + x + 2$ E) $x^2 + x + 1$

60. Indique la suma de términos independientes de los factores primos

$$P(x;y) \equiv (x + 1)(x + 4) - 9y(y - 1)$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

61. Al factorizar:

$$P(x;y) \equiv abx^2 - bcxy - dcy^2 + adxy$$

Indicar la suma de coeficientes de un factor primo:

- A) 2 B) $a + b$ C) -1
D) $c - d$ E) $b + d$

62. Determinar el número de factores primos de:

$$P(x) \equiv x^4 - 13x^3 + 60x^2 - 116x + 80$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 1 E) 5

63. ¿Cuántos factores primos lineales presenta el polinomio:

$$P(x) \equiv x^6 - 9x^4 - 16x^2 + 144?$$

- A) 3 B) 1 C) 6
D) 4 E) 2

64. Si un factor del polinomio:

$P(x) \equiv x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1$; tiene la forma: $ax^2 + bx + c$ ($a > 1$), calcular: $a + b + c$

- A) 2 B) 7 C) 4
D) 3 E) 8

65. Reconocer un factor primo de:

$$P(m;n) \equiv m^2(m-n)^2 - 14mn^2(m-n) + 24n^4$$

- A) $m + 4n$ B) $m - 3n$ C) $m + 2n$
D) $m - n$ E) $m - 4n$

66. Indicar el número de factores primos de coeficientes enteros del polinomio:

$$P(x) \equiv x^{12} - 17x^6 - 36x^3 - 20$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

67. Indicar un factor primo de:

$$P(a;b) \equiv a^8 + b^8 + 4a^2b^2(a^4 + b^4) - 10a^4b^4$$

- A) $a^4 + 2a^2b^2 - b^4$ B) $a + 2b^2$
C) $a + b$
D) $(a - b)^2$ E) $a^4 + b^4 - 6a^2b^2$

68. Indicar el número de factores primos de: $P(x;y;z) \equiv (x^2 - y^2)(z^3 - x^3) - (z^2 - x^2)(x^3 - y^3)$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

69. Al factorizar:

$$P(x) \equiv x^4 + 2x^3 - 17x^2 - 18x + 72$$

Indicar la suma de los términos independientes de sus factores primos.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 7 E) 8

70. Indicar el factor primo de mayor suma de coeficientes del siguiente polinomio:

$$P(x) \equiv x^4 + 10x^2 - 21x + 2x^3 - 30$$

- A) $x^2 + 15$
B) $x^2 + 20$
C) $x(x + 3) + 15$
D) $x(x + 2) + 30$
E) $x(x + 4) + 15$

71. Luego de factorizar al polinomio:

$$6x^3y^2z + 15x^2y^4z^2 - 4x^2y^3z + 5xy^3z^2 - 2xy^2z$$

Marcar verdadero (V) o falso (F)

- I. Tiene seis factores primos
II. Un factor es: $2xy + 5yz - 2$
III. Sólo tiene tres factores
IV. Un factor es: $3xy - 1$

- A) FFVV B) VVFF C) VFVF
D) FVFF E) VVFF

72. ¿Cuántos factores mónicos presenta el polinomio:

$$P(x) = 3 - x(11x^2 + 1) + x^2(6x^2 - 21)?$$

- A) 2 B) 0 C) 1
D) 3 E) 4

73. Luego de factorizar al polinomio:

$$P(x, y) = 3(x - 2y - 5)^2 - 2(x - 2y) + 5$$

Indicar el cociente de los términos independientes de los factores primos obtenidos.

- A) 20 B) 5 C) 4
D) 8 E) 3

74. Indicar la suma de los factores primos del siguiente polinomio:

$$P(x) = 3x^3 - 31x^2 + 85x - m$$

Sabiendo que: $P(3^{-1}) = 0$

- A) $7x - 2$ B) $5x - 6$ C) $7x - 5$
D) $3x - 1$ E) $4x - 6$

75. Luego de factorizar la suma de los factores primos de:

$$P(x, y) = (ax + by)(ay + bx) - (ax + by - ay - bx) - 1; \text{ un factor es:}$$

- A) $ay + bx - 1$ B) $a + b$
C) $a + x$
D) $b + y$ E) $x - y$

76. Mostrar el MCD de los polinomios:

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - x - 3$$

$$Q(x) = 2x^4 + 7x^2 + 8x^2 + 6x + 1$$

$$R(x) = 6x^5 + 17x^4 + 23x^3 + 18x^2 + 7x + 1$$

- A) $x^2 - x + 1$ B) $x^2 + x + 1$
C) $x^2 + 1$
D) $x + 1$ E) $x - 1$

77. El MCD y el MCM de dos polinomios son:

$$x^2 + 3x + 2y(x+5)(x+1)(x+2)(x+3)$$

respectivamente si uno de los polinomios es: $(x+1)(x+2)(x+3)$. Determinar el otro indicando la suma de sus coeficientes.

- A) 30 B) 36 C) 40
D) 42 E) 45

78. Sabiendo que $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios mónicos de tercer grado cuyo MCD es $(x^2 - n^2)$, donde: $P(0) = n^3$; $Q(0) = 0 \wedge Q(3) = -120$; $(n > 0)$.

Calcular un equivalente de:

- A) $x^2 - 7x + 6$ B) $x^2 + 14x$
C) $x^2 - 7x$
D) $x^2 + 7x$ E) $x^2 + 28x$

79. Si: $P(x) = (x + 3)[x^2 + (a - 2)x - 2a]$
 $Q(x) = (x - 2)[x^2 + (b + 3)x + 3b]$
Donde el término independiente del MCM es: 120 y el coeficiente de x^3 al efectuar: es 2.

Calcular: $a^{-1} + b^{-1}$; $a \neq b$

- A) 0,01 B) -0,02 C) 0,04
D) -0,05 E) 0,20

80. Calcular $F(1)$, donde:

Siendo:

$$P(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 2$$

$$Q(x) = 3x^3 + x^2 + x - 2$$

$$R(x) = x^5 + x^4 + 1$$

- A) 4 B) 2 C) -2
D) 1 E) 0

81. Un factor de:

$$P(x,y) \equiv (a+b)^2x^2 + (a-b)^2y^2 + 2(a^2+b^2)xy$$

- A) $(a+b)x + (a-b)y$
 B) $(a+b)x - (a-b)y$
 C) $ax + by$
 D) $(a+b)2x + (a-b)2y$
 E) $x - y$

82. Indicar la suma de los coeficientes de uno de los factores primos del siguiente polinomio:

$$P(x) \equiv 36x^3 - 216x^2 + 395x - 200$$

- A) -6 B) 1 C) -2
 D) -4 E) 2

83. Siendo:

$$P(x,y) \equiv 4(x^2 - y^2)(x+y)^2 + 6(x^2 - y^2)^2$$

$$Q(x,y) \equiv 4(x^2 - y^2)(x-y)^2 + (x-y)^4$$

Reconocer un factor de: $[P + Q](x,y)$

- A) $x^2 + xy + y^2$ B) $x + y$
 C) $x + 3y$
 D) $x + xy + y$ E) $3x + y$

84. Reconocer al factor primo cuadrático de:
- $P(x) \equiv (x+1)^2(x^2 + 2x + 2) + 1$

- A) $x^2 - 2x - 1$ B) $x^2 - x + 1$
 C) $x^2 + 3x + 3$
 D) $x^2 + 2x - 1$ E) $x^2 + x - 1$

85. Señale un factor de:

$$P(x) \equiv (1 + x + x^2 + x^3)^2 - x^3$$

- A) $x^2 + x - 1$
 B) $x^2 - x + 1$
 C) $x^3 + x^2 + x^4 + x + 1$
 D) $x^2 + x + 1$
 E) $x^3 + x^2 + 1$

86. Indicar la suma de los factores primos del siguiente polinomio:

$$P(x) \equiv (x-1)^3 - 21x + 41$$

- A) $3x - 1$ B) $3(x-1)$ C) $3(x+1)$
 D) x E) $3x - 2$

87. Indicar el número de factores primos del polinomio:

$$P(x) \equiv (x^2 + 1)(x^2 - 4) - x(1 - x^2) + 6$$

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5

88. ¿Cuántos factores primos tiene el polinomio:

$$P(x) \equiv x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1?$$

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5

89. Indicar el valor numérico de uno de los factores del polinomio:

$$P(x) \equiv x^{72} - x^{40} + 4x^{36} + 4$$

Cuando $x = 1$

- A) 1 B) 0 C) 3
 D) 4 E) 8

90. Indicar el número de factores cúbicos de:
- $P(x) \equiv x^6(x^4 + 2) + x^2 - 1$

- A) 3 B) 2 C) 1
 D) 8 E) 6

91. Reconocer un factor de:

$$P(x) \equiv (x^2 + x - 1)^2 + (2x + 1)^2 + x^6 + 1$$

- A) $x + 1$ B) $x^4 + x + 3$
 C) $x^2 + 2$
 D) $x^2 + 2x + 3$ E) $x^4 + 2x + 3$

92. Indicar un factor de la suma de los factores primos de:

$$P(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 - 1$$

- A) $x^2 + x + 1$ B) $x^2 - x + 1$
C) x
D) $x - 1$ E) $x + 1$

93. Reconocer un factor de:

$$(x+y+z)^4 + x^4 + y^4 + z^4 - (x+y)^4 - (x+z)^4 - (y+z)^4$$

- A) $x - y + z$ B) $x + y + z$
C) $x^2 + y^2 + z^2$
D) $x + 2y + z$ E) N.A

94. Indicar la suma de los coeficientes de un factor primo del polinomio:

$$x^8 + 4x^7 + 10x^6 + 16x^5 + 19x^4 + 16x^3 + 10x^2 + 4x + 1$$

- A) 0 B) 3 C) 2
D) 4 E) 5

95. ¿Cuántos factores primos presenta el polinomio?

$$P(x,y) = (x+y)^2(x^2 + 3xy + y^2) - 6xy[(x+y)^2 - xy]$$

- A) 1 B) 5 C) 3
D) 4 E) 2

96. Al factorizar: $P(x) = x^5 + 2x^3 + x - 1$

Indicar la suma de coeficientes de un factor primo.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) $A \vee C$

97. Indicar un factor cúbico:

$$P(x) = x^{12} - 4x^9 + 6x^6 - 4x^3 + 1$$

- A) $x^3 + 1$ B) $x^3 + 2$ C) $x^3 - 2$
D) $x^3 - 1$ E) $x^3 + 3$

98. Indicar un factor de la suma de los factores primos de:

$$P(x) = x^7 + x^4 - x^2 + x + 1$$

- A) $x^2 + x + 1$ B) $x^3 + x + 1$
C) $x^3 - x + 1$
D) $x - 1$ E) $x^3 - x + 2$

99. Si a un factor le agregamos xy :

$$P(x,y) = x^5 + x^4y + y^5$$

Se obtiene:

- A) $(x-y)^2$ B) xy C) $(x+y)^2$
D) $-xy$ E) $x-y$

100. Indicar un factor primo de:

$$P(a; b; c; d) = 4(ad + bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2$$

- A) $a + b$ B) $c - d$
C) $a - b$
D) $b + c - a + d$ E) $a + b + c + d$

**CLAVES**

1	C	26	D	51	E	76	B
2	A	27	D	52	E	77	B
3	B	28	C	53	C	78	D
4	A	29	A	54	D	79	D
5	D	30	D	55	D	80	B
6	D	31	E	56	B	81	D
7	E	32	C	57	D	82	B
8	C	33	A	58	C	83	E
9	E	34	C	59	E	84	C
10	A	35	C	60	E	85	C
11	C	36	C	61	E	86	B
12	E	37	D	62	B	87	C
13	A	38	D	63	D	88	D
14	E	39	E	64	B	89	D
15	C	40	D	65	E	90	B
16	B	41	B	66	C	91	E
17	C	42	A	67	C	92	C
18	C	43	C	68	C	93	B
19	D	44	B	69	B	94	C
20	E	45	B	70	C	95	E
21	C	46	C	71	D	96	E
22	E	47	B	72	D	97	D
23	B	48	C	73	B	98	E
24	E	49	A	74	E	99	C
25	D	50	D	75	A	100	D

**EXÁMENES DE
ADMISIÓN
UNI - UNMSM
PUCP**

UNI - 2003 - II

PROBLEMA 1:

Sea $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < -1$ donde a y b son números reales, entonces dadas las proposiciones:

I. $(a + 1)^2 < (b + 1)^2$

II. $a^2 > b^3$

III. $a^3 - b^3 > 0$

Son ciertas:

A) I y II

B) II y III

C) I y III

D) I, II y III

E) Sólo II

SOLUCIÓN:

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < -1$$

Invirtiendo tenemos: $0 > a > b > -1$

Entonces:

I. $a + 1 > b + 1$ (son positivos)

$$(a + 1)^2 > (b + 1)^2$$

La proposición es falsa.

II. Un número elevado a un exponente par siempre es positivo, luego $a^2 > b^3$

La proposición es verdadera.

III. $a > b \Rightarrow a^3 > b^3$

$$a^3 - b^3 > 0$$

La proposición es verdadera.

$\therefore$ Son ciertas II y III

CLAVE:

PROBLEMA 2:

En una caja C_1 hay 5 bolas negras y en otra caja C_2 hay 8 bolas blancas. Se escogen 3 bolas de C_2 y se las coloca en C_1 . Después de este procedimiento, sea b el número de bolas blancas en C_1 y n el número de bolas negras en C_2 . Entonces:

A) $b = n - 2$

B) $b = n + 2$

C) $b = n + 1$

D) $b = n - 1$

E) $b = n$

SOLUCIÓN:

De los datos:

$$I. \begin{cases} C_1 : 5N \\ C_2 : 8B \end{cases}$$

$$II. \begin{cases} C_1 : 5N - 3N = 2N \\ C_2 : 8B + 3N \end{cases}$$

III. Se escogen $x_B + y_N$ tal que: $x_B + y_N = 3$ de C_2 y se colocan en C_1

$$\rightarrow \begin{cases} C_1 : 2N + x_B + y_N \\ C_2 : 8B + 3N - (x_B + y_N) \end{cases}$$

Del dato:

$$b = x_B$$

$$n = 3 - y_N$$

Restando las ecuaciones:

$$b - n = x_B + y_N - 3 = 0 \text{ ya que } x_B + y_N = 3$$

$$\therefore b = n$$

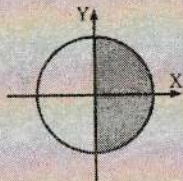
CLAVE:

PROBLEMA 3: Indique gráficamente todos los puntos de plano que verifican las relaciones

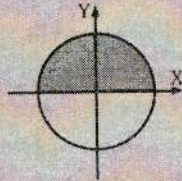
$$|e^z| \leq 1 \text{ y } |z| \leq 1$$

Donde: $z = x + iy$

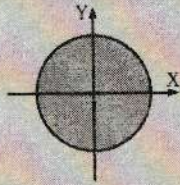
A)



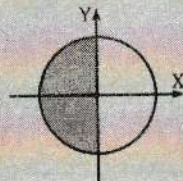
B)



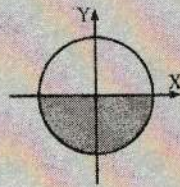
C)



D)



E)



SOLUCIÓN:

Dato:

$$|e^z| \leq 1 \text{ y } |z| \leq 1$$

Sea:

$$z = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$$

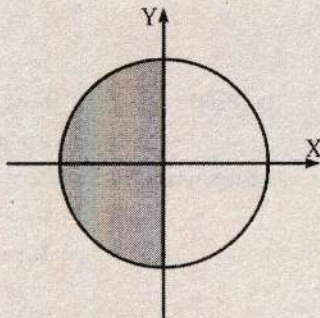
$$|e^{x+iy}| \leq 1 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$$

$$|e^x \cdot e^{iy}| \leq 1 \wedge x^2 + y^2 \leq 1$$

$$e^x \leq e^0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\rightarrow x \leq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1$$

Graficando:



∴ La alternativa correcta es D

CLAVE: D

PROBLEMA 4:

Con cierto tipo de papel se elabora un libro de 1000 páginas cuyo espesor (sin contar las tapas) es de 1 cm.

Suponga que una hoja muy grande de dicho tipo de papel es doblada en 2 (con lo cual su área se reduce a la mitad); es vuelta a doblar, y así sucesivamente es doblada 50 veces, adquiriendo un espesor total E.

El valor aproximado de E es:

A) 2 cm.

B) 10 m

C) 5 km.

D) 5×10^5 km.

E) $2,25 \times 10^7$ km

SOLUCIÓN:

Si 1000 páginas = 500 hojas miden 1 cm; entonces cada hoja mide $\frac{1}{500}$ cm.

Sea:

$$a = \frac{1}{500} \text{ cm.}$$

Entonces:

Al doblar

Espesor

1ª. Vez que se dobló:

$$2a = 2^1 \times a$$

2ª. Vez que se dobló:

$$4a = 2^2 \times a$$

3ª. Vez que se dobló:

$$8a = 2^3 \times a$$

•

50^{ava}. Vez que se dobló:

$2^{50} \times a$

El espesor será:

$$E = 2^{50} \times \frac{1}{500} \text{ cm} \approx 225 \times 10^{13} \text{ cm}$$

$\therefore$ E es aproximadamente $2,25 \times 10^7$ km.

CLAVE: E

PROBLEMA 5: Las soluciones reales de la ecuación:

$$\log_5 (x^2 - 20x) = 3 \text{ son:}$$

A) no existen.

B) únicamente $x = 25$ C) únicamente $x = 5$

C) únicamente $x = 5$

D) $x_1 = 5; x_2 = 25$

E) $x_1 = -5$; $x_2 = 25$

SOLUCIÓN:

Dato:

$$\log_5 (x^2 - 20x) = 3$$

Hallamos su conjunto solución:

CVA:

$$x^2 - 20x > 0 \rightarrow x < 0 \vee x > 20$$

Por definición de logaritmos se tiene:

$$x^2 - 20x = 5^3$$

$$x^2 - 20x - 125 = 0$$

De donde:

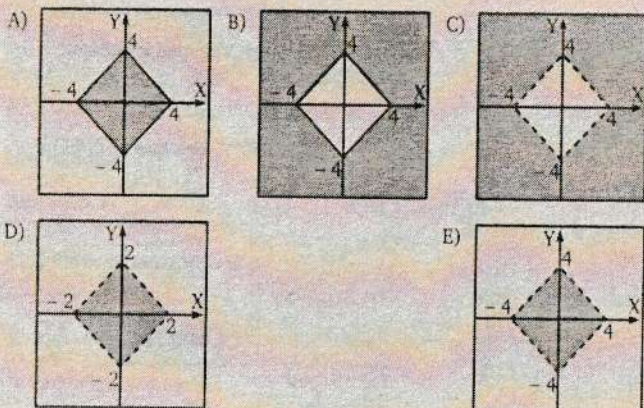
$$x = 25 \vee x = -5$$

Como estos valores satisfacen la CVA, entonces son las soluciones reales.

$$\therefore x_1 = -5; x_2 = 25$$

CLAVE: E

PROBLEMA 6: La gráfica de la desigualdad: $|x| + |y| < 4$ es:

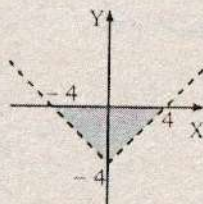
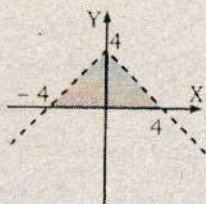


SOLUCIÓN:

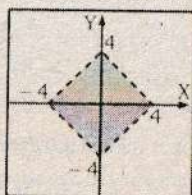
Nos piden la gráfica de la relación dada por: $|x| + |y| < 4$.

Luego, analizando dos casos:

$$\begin{cases} y \geq 0 \wedge \\ y < 4 - |x| \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y < 0 \wedge \\ y > |x| - 4 \end{cases}$$



Finalmente, uniendo las gráficas tenemos:



La gráfica correcta es E.

CLAVE: E

PROBLEMA 7: El conjunto de soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ x - y = r \end{cases}; \text{ para } r > 0, \text{ es:}$$

- A) $\emptyset$
- B) un conjunto unitario.
- C) un conjunto con dos elementos.
- D) un conjunto con tres elementos.
- E) un conjunto con cuatro elementos.

SOLUCIÓN:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$x - y = r \quad \dots\dots\dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos:

$$x^2 + (x - r)^2 = r^2$$

$$2x(x - r) = 0$$

Esto solo ocurre si y solo si:

$$x = 0 \vee x = r$$

Reemplazando en (2):

Para $x = 0$: $y = -r$

Para $x = r$: $y = 0$

$$CS = \{(0; -r), (r; 0)\}$$

$\therefore$ Es un conjunto de dos elementos.

CLAVE: C

PROBLEMA 8: Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ tales que : } AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces el valor de $a + b + c + d$ es:

- A) -1
- B) 0
- C) -2
- D) 1
- E) 2

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 04

SOLUCIÓN:

Del dato tenemos: $AB = I$ Como: $|A| \neq 0$

Multiplicando por la inversa de A tenemos:

$$A^{-1}AB = A^{-1}I$$

$$B = A^{-1}$$

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a = \frac{3}{2}; b = -\frac{1}{2}; c = -\frac{1}{2}; d = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + b + c + d = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

CLAVE: D

PROBLEMA 9:

Sea la función: $f : \langle 1; \infty \rangle \rightarrow \mathbb{N}$, tal que $f(x)$ es el número de primos menores o iguales a x .Si: $g(x) = \frac{f(\sqrt{2})x^2 + 3f(8)}{x + f(f(f(23)))}$; entonces $f(g(4))$ es igual a:

A) 0

B) 1

C) $\frac{17}{7}$ D) $\frac{13}{5}$

E) 3

SOLUCIÓN:

Siendo los números primos:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23;.....

Tenemos que:

* $f(\sqrt{2}) = 0$; pues no existe algún número primo menor o igual a $\sqrt{2}$ * $f(8) = 4$, pues existen 4 números primos menores o iguales que 8.

De la misma forma podemos decir:

$$\underbrace{f(\underbrace{f(\underbrace{f(23)))}_9)}_4 = 2$$

Reemplazando en $g(x)$ tenemos:

$$g(x) = \frac{f(\sqrt{2})x^2 + 3f(8)}{x + f(f(f(23)))}$$

$$g(x) = \frac{0 + 12}{x + 2} = \frac{12}{x + 2}$$

Luego: $f(g(4)) = f(2) = \frac{12}{2 + 2} = \frac{12}{4}$

$$\therefore f(g(4)) = 3$$

CLAVE: D

PROBLEMA 10: Dada la ecuación: $z^2 + (a + bi)z + c + id = 0$; donde: a, b, c y d son reales. Esta ecuación tiene una raíz real. Esta ecuación tiene una raíz real, si sus coeficientes satisfacen la relación.

- A) $abd = c^2 + d^2b$ B) $abd = d^2 + c^2b$ C) $abd = b^2 + c^2d$
D) $abd = b^2 + d^2c$ E) $abd = d^2 + b^2c$

SOLUCIÓN:

Sea m la solución real. Reemplazando en la ecuación:

$$m^2 + (a + bi)m + c + di = 0$$

Agrupando: $(m^2 + am + c) + (mb + d)i = 0$

Por ser nulo: $\underbrace{m^2 + am + c = 0}_{(I)} \wedge \underbrace{bm + d = 0}_{(II)}$

De (II): $m = -\frac{d}{b}$

En (I): $\left(-\frac{d}{b}\right)^2 + a\left(-\frac{d}{b}\right) + c = 0$

De donde: $d^2 - abd + cb^2 = 0$

$$\therefore abd = d^2 + cb^2$$

CLAVE: E

UNI - 2004 - I

PROBLEMA 11: ¿Qué cantidad es necesaria aumentar a las raíces de la ecuación?

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)x^2 + 2(a+b)x + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1$$

Para que las cantidades resultantes sean iguales en magnitud pero de signos opuestos.

A) $\frac{a-b}{ab}$

B) $\frac{ab}{a-b}$

C) $\frac{a+b}{ab}$

D) $\frac{ab}{a+b}$

E) $\frac{b-a}{ab}$

SOLUCIÓN:Sean x_1 y x_2 , las raíces de la ecuación.Sumamos k a cada raíz y por la condición tenemos:

$$x_1 + k = -(x_2 + k)$$

$$\rightarrow k = -\frac{(x_1 + x_2)}{2}$$

Por el teorema de Cardano:

$$k = -\frac{\frac{2(a+b)}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}}{2} = \frac{ab}{a-b}$$

$$\therefore \text{ Se debe sumar: } \frac{ab}{a-b}$$

CLAVE: B**PROBLEMA 12:** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x^2 + 5xy - 18y^2 = 0$$

$$xy + y^2 - 12 = 0$$

A) $(-4; 2), (-2; 4)$ B) $(-4; -2), (-2; 4)$ C) $(4; 2), (-4; -2)$

D) $(4; 2), (-2; 4)$ E) $(4; -2), (-4; -2)$

SOLUCIÓN:

En la primera ecuación:

$$2x^2 - 5xy - 18y^2 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 2x & & 9y \\ & \times & \\ x & & -2y \end{array}$$

$$x = -\frac{9y}{2} \vee x = 2y$$

Reemplazando en la segunda ecuación:

* Si $x = 2y$ tenemos:

$$3y^2 - 12 = 0$$

$$y^2 = 4$$

$$y = 2 \vee y = -2$$

De aquí:

$$x = 4 \vee x = -4$$

En este caso las soluciones son:

$$(4; 2), (-4; -2)$$

* Si $x = -\frac{9y}{2}$ tenemos:

$$-\frac{9y}{2} + y^2 - 12 = 0$$

$$7y^2 = -24; y \notin \mathbb{R}$$

En este caso, existirán dos soluciones de componentes no reales.

Sin embargo, la pregunta solo considera soluciones de componentes reales.

$$\therefore CS = \{(4; 2), (-4; -2)\}$$

CLAVE: C

PROBLEMA 13:

Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. Si $x_1 = x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ para toda función f .

II. Si $f(x) = \frac{3}{ax - 4}; x \in [-2; 4) \rightarrow f$ es una función sobreyectiva sobre $x \in [-2; 2]$.

III. Toda función impar es univalente.

A) VVV

B) VVF

C) FVF

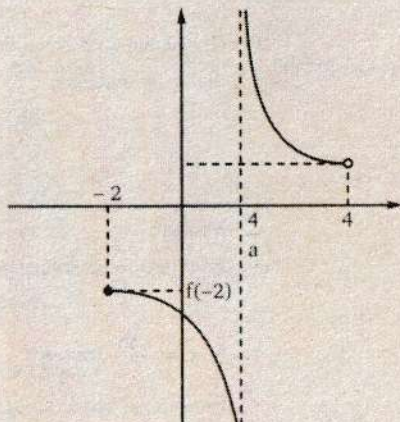
D) FFV

E) VFF

SOLUCIÓN:I. $x_1 = x_2$ entonces los pares ordenados:

$$(x_1; f(x_1)), (x_2; f(x_2)) \in f, \text{ entonces: } f(x_1) = f(x_2)$$

La proposición es verdadera

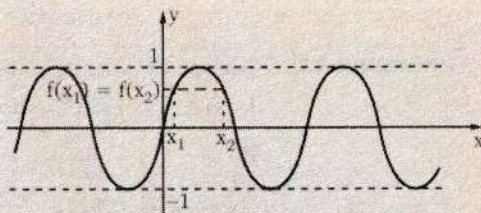
II. $f: [2; 4) \rightarrow B$ tal que $f(x) = \frac{3}{ax - 4}$ veamos para $a > 0$.

Vemos:

$$\text{Ran } f = \underbrace{(-\infty; f(-2)] \cup (f(4); \infty)}_{\text{(conjunto de llegada)}} = B$$

Si restringimos x a $[-2; 2)$ notar $f(4) \neq f(2)$ $\rightarrow f$ no es sobreyectiva.

La proposición es falsa.

III. Veamos un contraejemplo: $f(x) = \sin x$; una función impar, pero no es univalente.

$$x_1 \neq x_2 \text{ pero } f(x_1) = f(x_2)$$

La proposición es falsa.

 $\therefore$ La secuencia correcta es: VFF**CLAVE: E**

PROBLEMA 14: Sean: a, b, c y d cuatro números reales positivos tales que: $a - b = c - d$ y $a < c$. Diga la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

I. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$; si: $a < b$

II. $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$; si: $c < d$

III. $\frac{c}{b} < \frac{a}{d}$

A) FFV

B) FVV

C) FVF

D) VFF

E) VFF

SOLUCIÓN:

Del dato podemos afirmar que:

$$d = c + b - a \dots\dots\dots (1)$$

I. Si: $a < b \rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

Como $a < c$:
$$\begin{cases} a - b < 0 \\ a - c < 0 \end{cases}$$

$$-(a - b)(a - c) < 0$$

$$a(c + b - a) - bc < 0$$

De (1): $ad - bc < 0 \rightarrow ad < bc$

$$\rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

La proposición es verdadera.

II. Si: $c < d \rightarrow \frac{c}{b} < \frac{a}{d}$

Como $a < c$ y $a - b < 0$:

$$(a - c)(a - b) > 0$$

$$cb - (c + b - a)a > 0$$

De (1): $cb - da > 0 \rightarrow cb > da$

$$\rightarrow \frac{c}{d} > \frac{a}{b}$$

La proposición es falsa.

$$\text{III. } \frac{c}{b} < \frac{a}{d} \rightarrow c - a > 0 \text{ por } (c + b)$$

$$(c + b)(c - a) > 0$$

$$c(c + b - a) - ab > 0$$

De (1):

$$cd - ab > 0 \rightarrow cd > ab$$

$$\rightarrow \frac{c}{b} > \frac{a}{d}$$

La proposición es falsa.

∴ La secuencia correcta es: VFF

CLAVE: E**PROBLEMA 15:** Dada la siguiente ecuación:

$$\log(2x - 1)^n + \log(x - 1)^{10^{\log n}} = n$$

Halle x , sabiendo que n es cualquier entero positivo y $\log$ es el logaritmo en base 10.

A) 6

B) 3

C) 4

D) 2

E) 1,5

SOLUCIÓN:

$$\text{Del dato: } \log(2x - 1)^n + \log(x - 1)^{10^{\log 10^n}} = n$$

$$\text{Se tiene: } \log(2x - 1)^n + \log(x - 1)^n = n \dots\dots\dots (1)$$

Como n es cualquier número entero positivo:

$$\text{Entonces: } 2x - 1 > 0 \wedge x - 1 > 0$$

$$\text{Luego, afirmamos: } x > 1 \dots\dots\dots (2)$$

De (1), aplicamos propiedades de los logaritmos:

$$n \log(2x - 1) + n \log(x - 1) = n$$

$$\log_{10} (2x - 1)(x - 1) = 1$$

$$\rightarrow (2x - 1)(x - 1) = 10$$

De donde obtendremos la siguiente ecuación:

$$2x^2 - 3x + 1 = 10$$

$$2x^2 - 3x - 9 = 0$$

$$\begin{array}{r} 2x \quad 3 \\ \times \quad \times \\ x \quad -3 \end{array}$$

$$\rightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = 3$$

De acuerdo con la condición de (2):

$$\therefore x = 3$$

CLAVE: B

PROBLEMA 16: Halle la suma de A de números complejos:

$$A = (1 + i) + (2 + i^2) + (3 + i^3) + (4 + i^4) + \dots + (4n + i^{4n})$$

A) $n(2n + 1)$

B) $2n(4n + 1)$

C) 0

D) $n(4n + 1)$

E) $2n(4n - 1)$

SOLUCIÓN:

Asociando convenientemente:

$$A = (1 + 2 + 3 + \dots + 4n) + (i + i^2 + i^3 + \dots + i^{4n})$$

Pero por propiedad de series:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 4n = \frac{4n(4n + 1)}{2} = 2n(4n + 1)$$

Además, por propiedad de los números complejos:

$$i + i^2 + i^3 + i^4 = i + (-1) + (-i) + 1 = 0$$

Análogamente podemos afirmar:

$$i^5 + i^6 + i^7 + i^8 = i + (-1) + (-i) + 1 = 0$$

$$i^9 + i^{10} + i^{11} + i^{12} = i + (-1) + (-i) + 1 = 0$$

Esto quiere decir que cada cuatro elementos el resultado es 0.

Entonces:

$$i + i^2 + i^3 + \dots + i^{4n} = 0$$

Luego el valor de A viene dado por:

$$A = 2n(4n + 1) + 0$$

$$\therefore A = 2n(4n + 1)$$

CLAVE: B

PROBLEMA 17: Determine el conjunto de valores del número real r tal que la función:
 $f(x) = (rx^2 - 2rx + 1)^{-1}$, está definida en $[0; 1]$.

A) $[-\infty; 0)$

B) $\langle 0; +\infty)$

C) $[0; 1)$

D) $\langle -\infty; 1)$

E) $[1; +\infty)$

SOLUCIÓN:

Para que: $f(x) = \frac{1}{rx^2 - 2rx + 1}$ esté definida en $[0; 1]$, entonces:

$$rx^2 - 2rx + 1 \neq 0; \forall x \in [0; 1]$$

* Si: $x = 0$ entonces, se cumple que $f(x) \in \mathbb{R}$.

* Si: $x \in \langle 0; 1]$; despejando:

$$r \neq -\frac{1}{(x-1)^2 + 1} \geq 1$$

Como:

$$0 < x \leq 1$$

$$-1 < x - 1 \leq 0$$

$$0 \leq (x-1)^2 < 1$$

$$-1 \leq (x-1)^2 - 1 < 0$$

$$\frac{1}{(x-1)^2 - 1} \leq -1$$

$$-\frac{1}{(x-1)^2 - 1} \geq 1$$

Como r no debe tomar estos valores:

$$\therefore r \in \langle -\infty; 1)$$

CLAVE: D

PROBLEMA 18: Sea (a_n) la sucesión cuyo término general es:

$$a_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$$

Entonces podemos afirmar que:

A) a_n diverge a ∞ .

B) a_n converge a n .

C) a_n converge a 1.

D) a_n converge a 0.

E) a_n diverge a $-\infty$.

SOLUCIÓN:

Se tiene la sucesión (a_n) tal que:

$$a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$$

Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{n+1}^2 + \sqrt[3]{n+1} \times \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n}^2)}{\sqrt[3]{n+1}^2 + \sqrt[3]{n+1} \times \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n}^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}^2 + \sqrt[3]{n+1} \times \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n}^2} = 0$$

$\therefore (a_n)$ converge a 0.

CLAVE: D

PROBLEMA 19: De 6 números positivos y 5 términos negativos se escogen 4 números al azar y se multiplican. Entonces, el número de maneras en que el producto resultará positivo es:

A) 45

B) 170

C) 330

D) 480

E) 1080

SOLUCIÓN:

Se dispone de 6 números positivos y 5 números negativos. De estos se debe escoger 4 números de manera que su producto sea positivo.

Para ello analizaremos tres casos:

Caso I:

Todos sean positivos.

$$C_4^6 = \frac{6!}{4! \times 2!} = 15 \text{ formas}$$

Caso II:

Todos sean negativos.

$$C_4^5 = \frac{5!}{4! \times 1!} = 5 \text{ formas}$$

Caso III:

Dos negativos y dos positivos.

$$C_2^6 \times C_2^5 = \frac{6!}{2! \times 4!} \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 150 \text{ formas}$$

Total de maneras en que el producto sea positivo es:

$$\therefore 15 + 5 + 150 = 170$$

CLAVE: B

PROBLEMA 20: Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 5 \end{pmatrix}$$

Tal que: $AB = BA$, calcule el valor de $(a + c)$.

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{1}{2}$

C) 1

D) 2

E) 3

SOLUCIÓN:Como $AB = BA$, reemplazamos los datos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuando:

$$\begin{pmatrix} 2a - c & -3 \\ 3a + c & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 3 & -a + 1 \\ 2c + 15 & -c + 5 \end{pmatrix}$$

Aplicando la igualdad de matrices:

$$2a - c = 2a + 3$$

$$-3 = 1 - a$$

Resolviendo convenientemente tenemos:

$$a = 4 \wedge c = -3$$

$$\therefore a + c = 4 - 3 = 1$$

CLAVE: C**UNI - 2004 - II****PROBLEMA 21:** Determine el número de puntos de $A \cap B$, si A y B están dados por:

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| \leq 4\}$$

$$B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / |x| - |y| \leq 4\}$$

A) un punto.

B) dos puntos.

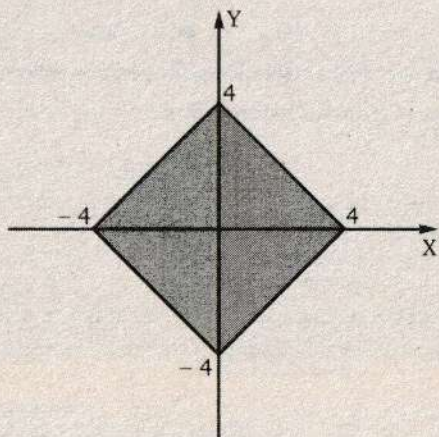
C) cuatro puntos

D) ocho puntos.

E) infinitos puntos

SOLUCIÓN:

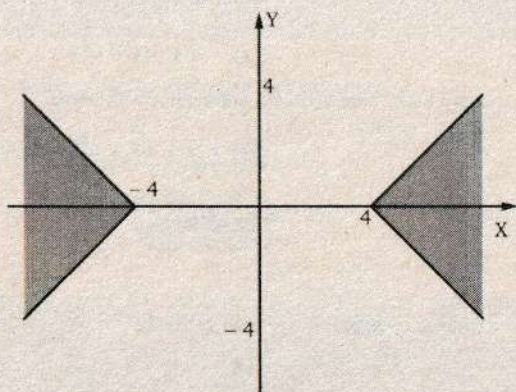
$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| \leq 4\}$$



$$B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / |x| - |y| \leq 4\}$$

$$|y| \leq |x| - 4$$

$$\rightarrow \begin{cases} y \leq |x| - 4 ; y \geq 0 \\ y \geq -|x| + 4 ; y < 0 \end{cases}$$



Vemos que:

$$A \cap B = \{(4; 0), (-4; 0)\}$$

∴ Existen dos puntos en la intersección.

CLAVE: B

PROBLEMA 22: Asuma que la función f , dada por:

$$f(x) = [x + 2a[x + 2a[x + \dots]^{1/2}]]^{1/2}$$

Está bien definida (los puntos suspensivos indican un proceso infinito).

Entonces también podemos escribir.

A) $f(x) = 2a + x$

B) $f(x) = 2\sqrt{a^2 + x^2}$

C) $f(x) = a + \sqrt{x^2 + a^2}$

D) $f(x) = a - \sqrt{x + a^2}$

E) $f(x) = a + \sqrt{a^2 + x}$

SOLUCIÓN:

$$f(x) = \sqrt{x + 2a\sqrt{x + 2a\sqrt{x + \dots}}}; f(x) \geq 0$$

$f(x)$

Aproximando:

$$f(x) = \sqrt{x + 2a\sqrt{x + 2a \times f(x)}}$$

$$f^2(x) - 2a f(x) + a^2 = x + a^2$$

$$(f(x) - a)^2 = x + a^2$$

$$f(x) - a = \pm (\sqrt{x + a^2})$$

$$f(x) = a \pm (\sqrt{x + a^2})$$

Como f está bien definido, entonces $x > 0$, luego:

$$\therefore f(x) = a + \sqrt{x + a^2} > 0; \forall a \in \mathbb{R}$$

CLAVE: E

PROBLEMA 23: Dada la sucesión, de término general:

$$S_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Entonces se puede decir que:

A) S_n converge a 0.

B) S_n converge a 1.

C) S_n converge a 2.

D) S_n converge a n .

E) S_n diverge.

SOLUCIÓN:

Dado: $S_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Racionalizando se tiene que:

$$S_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \times \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$\rightarrow S_n = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

Calculando el límite de S_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = 0$$

$\therefore S_n$ converge a 0.

CLAVE: A

PROBLEMA 24: Determine la base a tal que:

$$\log_a \sqrt{27} = -\frac{1}{2}$$

A) $\frac{1}{243}$

B) $\frac{1}{81}$

C) $\frac{1}{27}$

D) $\frac{1}{9}$

E) $\frac{1}{3}$

SOLUCIÓN:

Como a es base del logaritmo, entonces:

$$a > 0 \wedge a \neq 1.$$

Por definición del logaritmo:

$$\log_a \sqrt{27} = -\frac{1}{2}$$

$$a^{-1/2} = \sqrt{27}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = 27^{1/2} \rightarrow \frac{1}{a} = 27$$

$$\therefore a = \frac{1}{27}$$

CLAVE: C

PROBLEMA 25: En una exposición en el Museo de Arte de París, se van a colocar en línea tres cuadros de Picasso, cuatro cuadros de Rembrandt y dos de Van Gogh. ¿De cuántas maneras pueden ser ubicados los cuadros, de modo que los de Rembrandt se encuentren siempre juntos?

A) 288

B) 1728

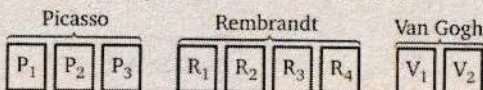
C) 2880

D) 17280

E) 36288

SOLUCIÓN:

Considerando que los cuadros son diferentes:



Número de maneras de ordenar en forma lineal, (FL).

Entonces:

$$FL = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Número de maneras de ordenar los cuadros de Rembrandt juntos, (OR).

Entonces:

$$OR = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Número total de maneras de ordenar, (NT):

$$NT = FL \times OR = 720 \times 24$$

$$\therefore NT = 17280$$

CLAVE: A

PROBLEMA 26: El producto de las raíces reales de la ecuación:

$$\sqrt{x^2 + 3x + 6} - 3x = x^2 + 4$$

A) -2

B) -1

C) 1

D) 2

E) 3

SOLUCIÓN:

I. Determinando el CVA:

$$\sqrt{x^2 + 3x + 6} = x^2 + 3x + 4$$

Vemos que:

$$x^2 + 3x + 4 > 0; \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\rightarrow CVA = \mathbb{R}.$$

II. Operando y haciendo el siguiente cambio:

$$a = x^2 + 3x + 4; a > 0$$

Tenemos: $\sqrt{a+2} = a$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

Operando: $(a-2)(a+1) = 0$

$$a = 2 \text{ ó } a = -1$$

Por condición: $a = 2 \text{ (} a > 0 \text{)}$

Reponiendo x: $x^2 + 3x + 4 = 2$

Operando: $x^2 + 3x + 2 = 0$

$$(x+2)(x+1) = 0$$

$$x = -2 \vee x = -1$$

Nos piden: Producto de raíces reales: P

$$\therefore P = -2 \times -1 = 2$$

CLAVE: D

PROBLEMA 27: Si: $\frac{xy}{5x+4y} = 6$; $\frac{xz}{3x+2z} = 8$; $\frac{yz}{3y+5z} = 6$.

Determinar el valor: $E = \frac{y}{x-z}$

A) 5

B) $\frac{15}{2}$

C) 10

D) $\frac{25}{2}$

E) 25

SOLUCIÓN:

$$\frac{xy}{5x+4y} = 6$$

$$\rightarrow 6(5x+4y) = xy$$

$$\rightarrow \frac{5x+4y}{xy} = \frac{1}{6}$$

$$\rightarrow \frac{5}{y} + \frac{4}{x} = \frac{1}{6} \quad \dots\dots\dots (I)$$

Análogamente de las otras dos ecuaciones:

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{z} = \frac{1}{8} \quad \dots\dots\dots (II)$$

$$\frac{5}{y} + \frac{4}{x} = \frac{1}{6} \quad \dots\dots\dots (III)$$

De (I) y (III) tenemos lo siguiente:

$$\frac{4}{x} = \frac{3}{z} \rightarrow \begin{matrix} x = 4K \\ z = 3K \end{matrix}$$

Reemplazando en (II):

$$K = 12$$

Luego: $x = 48$ y $z = 36$

De (I) tenemos: $y = 60$

$$\therefore E = \frac{y}{x - z} = \frac{60}{12} = 5$$

CLAVE: A

PROBLEMA 28: Dados los siguientes polinomios $P(x)$ de grado 2 y término independiente uno; y $Q(x) = (x - 1) P(x) + 3x + 1$. Si $Q(2) = 7$ y $P(1) = 2$. Halle la suma de las raíces de $Q(x)$.

A) 0

B) $\frac{8}{3}$

C) $\frac{10}{3}$

D) 4

E) 5

SOLUCIÓN:

Por datos:

$$Q(x) = (x - 1) P(x) + 3x + 1$$

Según condición:

$$P(x) = ax^2 + bx + 1; a \neq 0$$

De donde:

$$P(1) = 2 \rightarrow a + b = 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$Q(2) = 7 \rightarrow a(2)^2 + b(2) + 1 + 3(2) + 1 = 7$$

$$\rightarrow 4a + 2b = -1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Resolviendo (1) y (2): $a = -\frac{3}{2}$ y $b = \frac{5}{2}$

Luego se tiene:
$$Q(x) = (x - 1) \left(-\frac{3x^2}{2} + \frac{5}{2}x + 1 \right) + 3x + 1$$

$$\rightarrow Q(x) = -\frac{3x^3}{2} + 4x^2 + \frac{3x}{2}$$

Aplicando teorema de Cardano:

$$\therefore \text{Suma de raíces} = \frac{8}{3}$$

CLAVE: B

PROBLEMA 29: El valor de la determinante de:

$$F = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} \text{ es :}$$

A) $(a - b)(b - c)(c - a)$

B) $(a - b)(c - b)(a + c)$

C) $(b - a)(b + c)(a - c)$

D) $(a + b)(b - c)(a - c)$

E) $(a - b)(b - c)(a - c)$

SOLUCIÓN:

En el problema aplicaremos Teorema de Gauss

Intercambiamos columnas 1 y 3 y aplicando transpuesta:

$$F = - \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Aplicando Van der Monde:

$$F = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$F = -(b - a)(c - a)(c - b)$$

$$\therefore F = (a - b)(b - c)(a - c)$$

CLAVE: E

UNMSM - 2009

PROBLEMA 30: ¿Qué valor debe tomar "m" para que se verifique la igualdad:

$$\sqrt{(0,1)^{-m}} \sqrt{(0,01)^{-2m}} \sqrt{0,001} = 10?$$

A) $\frac{11}{12}$

B) $-\frac{11}{15}$

C) $\frac{11}{8}$

D) $\frac{12}{11}$

E) $-\frac{11}{12}$

SOLUCIÓN:

La ecuación podemos expresarla de la siguiente manera:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^{-m}} \sqrt{\left(\frac{1}{100}\right)^{-2m}} \sqrt{\frac{1}{100}} = 10$$

$$\sqrt{10^m} \sqrt{10^{4m}} \sqrt{10^{-3}} = 10$$

$$10^{\frac{12m-3}{8}} = 10^1$$

$$\rightarrow \frac{12m-3}{8} = 1$$

$$12m = 11$$

$$\therefore m = \frac{11}{12}$$

CLAVE: A**PROBLEMA 31:** Halle el área de la región limitada por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = |2x| \text{ y } g(x) = \frac{x}{2} + 5$$

A) $\frac{20}{3} u^2$

B) $\frac{32}{3} u^2$

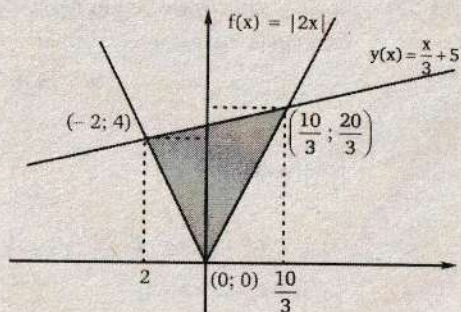
C) $\frac{38}{3} u^2$

D) $\frac{40}{3} u^2$

E) $\frac{16}{3} u^2$

SOLUCIÓN:

Graficando las funciones:



Hallando los puntos de intersección de las funciones determinados por:

$$|2x| = \frac{x}{3} + 5$$

Entonces por definición de intervalos:

$$2x = \frac{x}{3} + 5 \vee -2x = \frac{x}{3} + 5$$

$$5 = 2x - \frac{x}{3} \vee \frac{x}{3} - 2x = 5$$

$$x = \frac{10}{3} \vee x = -2$$

Aplicando determinante para hallar el área:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{10}{3} & \frac{20}{3} \\ -2 & 4 \\ \frac{10}{3} & \frac{20}{3} \end{vmatrix}$$

Desarrollando la determinante tenemos:

$$\therefore A = \frac{40}{3} u^2$$

CLAVE: E

PROBLEMA 32: Si x e y son números reales negativos; halle los valores enteros de " a " para que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6x + (a + 3)y = -2 \\ (a + 4)x + ay = 3 \end{cases}$$

Tenga solución única.

A) $\{a \in \mathbb{Z} / -13 < a < -2\}$

B) $\{a \in \mathbb{Z} / -12 < a < -1\}$

C) $\{a \in \mathbb{Z} / -12 < a < 0\}$

D) $\{a \in \mathbb{Z} / -13 < a < -3\}$

E) $\{a \in \mathbb{Z} / -12 < a < -2\}$

SOLUCIÓN:

Resolviendo el sistema tenemos, x en la primera reemplaza a la segunda:

$$-(a + 4) \frac{[2 + (a + 3)y]}{6} + ay = 3$$

$$6ay - [2a + 8 + y(a^2 + 7a + 12)] = 18$$

$$-(2a + 8) - y(a^2 + a + 12) = 18$$

$$y = \frac{-(26 + 2a)}{a^2 + a + 12}$$

Reemplazando para obtener x :

$$x = \frac{5a + 9}{a^2 + a + 12}$$

Como: $a^2 + a + 12$ posee $\Delta < 0$ entonces $a^2 + a + 12 > 0$; luego:

$$5a + 9 < 0 \quad y \quad 26 + 2a > 0$$

$$a > -\frac{9}{5} \quad \wedge \quad a < -13$$

$$-13 < a < -\frac{9}{5}$$

$$\therefore \{a \in \mathbb{Z} / -12 < a < -2\}$$

CLAVE: A

PROBLEMA 33: Si x es un número positivo, tal que:

$$\sqrt[3]{x^3 \sqrt{x^2 \sqrt{x}}} = x^{\left(\frac{4}{a}\right)^{-1}} \quad \text{y} \quad \frac{7(3^{b-1})}{9^{b+1} - 2(3^{2b})} = 3^b$$

Hallar la suma de $a + b$.

A) 4

B) 5

C) 6

D) 3

E) 7

SOLUCIÓN:

Desarrollamos cada expresión:

$$* \quad \sqrt[3]{x^3 \sqrt{x^2 \sqrt{x}}} = x^{\frac{a}{4}} \quad \dots \text{aplicamos propiedad}$$

$$\frac{33}{x^{24}} = x^{\frac{a}{4}}$$

$$\rightarrow \frac{33}{24} = \frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow a = \frac{11}{2}$$

$$* \quad \frac{7(3^{b-1})}{9^{b+1} - 2(3^{2b})} = 3^b$$

$$\frac{7 \times 3^b}{3[3^{2(b+1)} - 2(3^{2b})]} = 3^b$$

$$\frac{7}{3^{2b+3} - 2(3^{2b+1})} = 1$$

$$3^{2b+1}(9 - 2) = 7$$

$$3^{2b+1} = 1 = 3^0$$

$$\rightarrow 2b + 1 = 0$$

$$\Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

Reemplazando en lo pedido tenemos:

$$a + b = \frac{11}{2} - \frac{1}{2} = \frac{10}{2}$$

$$\therefore a + b = 5$$

CLAVE: B

PROBLEMA 34: Hallar el coeficiente de x^3 en el desarrollo del binomio: $(2x + (2x)^{-1})^{11}$.

A) 2640

B) 330

C) 660

D) 1320

E) 5280

SOLUCIÓN:

Analizamos el binomio:

$$(2x + (2x)^{-1})^{11}$$

El término de lugar k es:

$$t_k = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$t_k = \binom{11}{k} (2x)^{11-k} (2x)^{-k}$$

$$t_k = \binom{11}{k} (2x)^{11-2k}$$

$$\Rightarrow t_k = \binom{11}{k} 2^{11-2k} x^{11-2k}$$

Por dato:

$$11 - 2k = 3$$

$$\Rightarrow k = 4$$

Nos piden el coeficiente, reemplazando en el término general:

$$t_4 = \binom{11}{4} 2^{11-2 \times 4} = \frac{7! \times 8 \times 9 \times 10 \times 11}{4! \times 7!} \times 2^3$$

$$t_4 = \frac{8 \times 9 \times 10 \times 11}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times 8$$

$$\therefore t_4 = 2640$$

CLAVE: A**PROBLEMA 35:** Si el polinomio:

$$P(x) = n x^{n+5} + (n+1) x^{n+6} + (n+2) x^{n+7} + \dots$$

Es ordenado y completo; calcular: $P(1) - P(-1)$

A) -15

B) -12

C) 12

D) 5

E) 15

SOLUCIÓN:

Analizamos el polinomio:

$$P(x) = nx^{n+5} + (n+1)x^{n+6} + (n+2)x^{n+7} + \dots$$

Por definición de polinomio ordenado:

$$x^{n+5} = x^0$$

Por dato:

$$n - 5 = 0$$

$$\Rightarrow n = -5$$

Luego, reemplazando tenemos:

$$P(x) = -5 - 4x - 3x^2 - 2x^3 - x^4 + 0x^5 + \dots$$

Pero por condición el polinomio es completo, por lo que podemos deducir que es de cuarto grado, entonces:

$$P(x) = -5 - 4x - 3x^2 - 2x^3 - x^4$$

Entonces:

$$P(1) = -5 - 4(1) - 3(1)^2 - 2(1)^3 - (1)^4 = -15$$

$$P(-1) = -5 - 4(-1) - 3(-1)^2 - 2(-1)^3 - (-1)^4 = -3$$

Nos piden:

$$P(1) - P(-1) = -15 - (-3)$$

$$\therefore P(1) - P(-1) = -12$$

CLAVE: B

PROBLEMA 36: Si:

$$\begin{cases} 3^{2x} - 79(3^{x+y}) = 9^{y+2} \\ x^2 + 2xy + y^2 - 12x - 12y + 36 = 0 \end{cases}$$

Hallar el valor de la expresión: $\sqrt{x^2 - 2y + 2}$

A) 3

B) $\sqrt{19}$

C) 5

D) $\sqrt{14}$

E) $\sqrt{7}$

SOLUCIÓN:

Analizamos cada expresión factorizando convenientemente:

* La primera expresión, dando forma y aplicando aspa simple:

$$(3^x)^2 - 79(3^{x+y}) - 2(9^{y+2}) = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 3^x & & + 2 \times 3^y \\ & \nearrow & \searrow \\ & & - 81 \times 3^y \end{array}$$

>0

$$(3^x + 2 \times 3^y)(3^x - 81 \times 3^y) = 0$$

Luego:

$$3^x - 81 \times 3^y = 0$$

$$\Rightarrow 3^x - 3^4 \times 3^y = 0$$

$$3x = 3y + 4$$

$$x = y + 4$$

$$\Rightarrow x - y = 4 \quad \dots\dots\dots (1)$$

* En la segunda expresión, agrupamos convenientemente y luego aplicamos aspa simple:

$$(x^2 + 2xy + y^2) - (12x + 12y) + 36 = 0$$

$$(x + y)^2 - 12(x + y) + 36 = 0$$

Por ser trinomio cuadrado perfecto:

$$[(x + y) - 6]^2 = 0$$

$$x + y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x + y = 6 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Sumando las expresiones (1) y (2) tenemos:

$$2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

Reemplazando en (1) tenemos:

$$5 - y = 4 \Rightarrow y = 1$$

Nos piden: $\sqrt{x^2 - 2y + 2} = \sqrt{5^2 - 2 \times 1 + 2} = \sqrt{5^2}$

$$\therefore \sqrt{x^2 - 2y + 2} = 5$$

CLAVE: C

PROBLEMA 37: Hallar el dominio de la función f , definida por:

$$f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{2x - 3}{x + 5}\right)}$$

Es ordenado y completo; calcular: $P(1) - P(-1)$

A) $\mathbb{R} - \langle -5; 8 \rangle$

B) $\mathbb{R} - \langle -5; 8 \rangle$

C) $\mathbb{R} - [-5; 8]$

D) $\mathbb{R} - [-5; 7]$

E) $\mathbb{R} - [-5; 8]$

SOLUCIÓN:

Por definición de logaritmo se tiene:

$$\frac{2x - 3}{x + 5} > 0 \Rightarrow x \neq -5$$

Luego: $x \in \langle -\infty; -5 \rangle \cup \left\langle \frac{3}{2}; +\infty \right\rangle$ (1)

Para que f esté definida en los reales, se debe cumplir:

$$\ln\left(\frac{2x-3}{x+5}\right) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x-3}{x+5} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x-3}{x+5} - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-8}{x+5} \geq 0$$

$$\Rightarrow x \neq -5$$

Luego: $x \in \langle -\infty; -5 \rangle \cup [8; +\infty)$ (2)

De la intersección de (1) y (2), obtendremos el dominio de f

$$\therefore \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - [-5; 8)$$

CLAVE: E

PROBLEMA 38: Si el polinomio: $P(x)$ se divide por $(x-2)$, el cociente es $x^2 + 2x + 1$ y el residuo es r . Pero si $P(x)$ se divide por $(x-4)$, el residuo es $(-r)$. ¿Cuál es el valor de r ?

A) 25

B) -25

C) 20

D) -20

E) 0

SOLUCIÓN:

Se sabe por definición de la división y condiciones del problema tenemos:

$$P(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 1) + r \text{ (1)}$$

$$P(x) = (x-4)q(x) - r \text{ (2)}$$

En la segunda expresión aplicamos el teorema del resto:

$$P(4) = -r$$

También damos $x = 4$ en la expresión (1):

$$P(4) = (2)(16 + 8 + 1) + r$$

$$-r = 50 + r$$

$$\therefore r = -25$$

CLAVE: A

UNMSM - 2010 - I

PROBLEMA 39: Halle el rango de la función: $f(x) = -x^2 + 2x$, sabiendo que su dominio es igual al conjunto de los números reales.

A) $(-\infty; 0]$

B) $(-\infty; 1]$

C) $(-\infty; -1]$

D) $(-\infty; \infty)$

E) $[0; \infty)$

SOLUCIÓN:

Nos piden: Ran (f)

Completamos cuadrados en la función:

$$f(x) = -(x^2 - 2x + 1) + 1$$

$$f(x) = -(x - 1)^2 + 1$$

Como x es un número real podemos afirmar:

$$(x - 1)^2 \geq 0$$

Multiplicando por (-1) tenemos:

$$-(x - 1)^2 \leq 0$$

Sumando 1 en la desigualdad:

$$1 - (x - 1)^2 \leq 1$$

Entonces:

$$f(x) \leq 1$$

$$\therefore (-\infty; -1]$$

CLAVE: C

PROBLEMA 40: Sea " a " un número real positivo diferente de 1. Halle el valor de " y " que satisface el sistema de ecuaciones: $a^{1+y} = 16$; $a^{1-2y} = 0,25$

A) $\log_a 6$

B) $\log_a 64$

C) $\log_a 16$

D) $\log_a 8$

E) $\log_a 4$

SOLUCIÓN:

De la segunda ecuación tenemos:

$$\frac{a^x}{a^{2y}} = \frac{1}{4} \Rightarrow a^x = \frac{a^{2y}}{4}$$

Reemplazando en la primera ecuación:

$$a^x \times a^y = 16$$

$$\frac{a^{2y}}{4} \times a^y = 16$$

$$\Rightarrow a^{3y} = 64$$

Aplicando raíz cúbica tenemos:

$$a^y = 4$$

Tomando logaritmo de base a, se tiene:

$$\log_a a^y = \log_a 4$$

$$\therefore y = \log_a 4$$

CLAVE: E

PROBLEMA 41: Dada la ecuación:

$$2\left|x + \frac{1}{2}\right|^2 - 7\left|x + \frac{1}{2}\right| = -6$$

Halle la suma de sus soluciones.

A) -1

B) -2

C) $-\frac{3}{4}$

D) $\frac{3}{4}$

E) $-\frac{11}{4}$

SOLUCIÓN:

Hacemos un cambio de variable en la ecuación original:

$$m = \left|x + \frac{1}{2}\right|$$

Reemplazando: $2m^2 - 7m + 6 = 0$

Fácilmente podemos afirmar:

$$(2m - 3)(m - 2) = 0$$

Resolviendo tenemos:

$$m = \frac{3}{2} \vee m = 2$$

Hallamos los valores de x, en ambos casos:

$$\star \text{ Si: } a = \frac{3}{2} \Rightarrow \left|x + \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$$

Por definición de valor absoluto tenemos:

$$x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \vee x + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = -2$$

$$* \text{ Si: } a = 2 \Rightarrow \left| x + \frac{1}{2} \right| = 2$$

Por definición de valor absoluto tenemos:

$$x + \frac{1}{2} = 2 \vee x + \frac{1}{2} = -2$$

$$x = \frac{3}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{5}{2}$$

$$\text{Luego tenemos que: C.S.} = \left\{ -\frac{5}{2}; -2; 1; \frac{3}{2} \right\}$$

$$\therefore \text{ Suma de soluciones} = -2$$

CLAVE: B

PROBLEMA 42: Si x e y son números enteros positivos que satisfacen las ecuaciones:

$$\sqrt{\frac{x+y}{6x}} + \sqrt{\frac{6}{x+y}} = \frac{5}{2} \wedge xy - x - y = 9$$

Halle el valor de: $13x + 9y$.

A) 104

B) 105

C) 103

D) 102

E) 106

SOLUCIÓN:

En la segunda ecuación podemos factorizar:

$$xy - x - y + 1 = 10$$

$$x(y-1) - (y-1) = 10$$

$$(x-1)(y-1) = 10$$

En la primera ecuación podemos observar que:

$$\sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \left(\sqrt{\frac{6x}{x+y}} \right)^{-1}$$

Se presentan dos casos:

$$* \text{ Si: } \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = 2; x, y \in \mathbb{Z}^+$$

Operando tenemos que:

$$y = 23x$$

Reemplazando en la segunda ecuación:

$$(x - 1)(23x - 1) = 10$$

Podemos afirmar que:

$\nexists x \in \mathbb{Z}^+$ que cumpla la igualdad.

$$\star \text{ Si } : \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{1}{2}; x, y \in \mathbb{Z}^+$$

Operando tenemos que:

$$x = 2y$$

Reemplazando en la segunda ecuación:

$$(2y - 1)(y - 1) = 10$$

De donde: $y = 3 \wedge x = 6$

Nos piden: $13x + 9y = 13(6) + 9(3) = 78 + 27$

$$\therefore 13x + 9y = 105$$

CLAVE: B

PUCP - 2009 - I

PROBLEMA 43: Simplificar y hallar el valor de x:

$$\frac{\frac{x+1}{2} + 1}{2} = \frac{\frac{x+1}{3} + 1}{3}$$

A) 1

B) 2,2

C) 3

D) -2,2

E) -2

SOLUCIÓN:

Aplicando propiedades tenemos:

$$3\left(\frac{x+1}{2} + 1\right) = 2\left(\frac{x+1}{3} + 1\right)$$

$$\frac{3}{2}(x+1) + 3 = \frac{2}{3}(x+1) + 2$$

$$\frac{5}{6}(x+1) = -1$$

$$x + 1 = -\frac{6}{5}$$

$$x = -\frac{6}{5} - 1 = -\frac{11}{5}$$

$$\therefore x = -2,2$$

CLAVE: D

PROBLEMA 44: Dado : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1$ ($a; b \neq 0$) . Determinar $\frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2}$

A) 1

B) 2

C) 3

D) -1

E) -2

SOLUCIÓN:

Dando forma a la expresión:

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = ab$$

Aplicando productos notables tenemos:

$$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2(a^2 b^2)$$

Reemplazando: $a^2 b^2 = a^4 + b^4 + 2a^2 b^2$

$$-a^2 b^2 = a^4 + b^4$$

$$\therefore \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} = -1$$

CLAVE: D

PROBLEMA 45: Hallar el valor de x, si: $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 120$

A) 1

B) 2

C) 3

D) -1

E) -3

SOLUCIÓN:

Factorizando convenientemente tenemos:

$$3^{x+1}(3 + 1) + 3^{x-1}(3 + 1) = 120$$

Simplificando: $3^{x+1} + 3^{x-1} = 30$

$$3^{x-1}(9 + 1) = 30$$

$$3^{x-1} = 3 = 3^1$$

$$\therefore x = 2$$

CLAVE: B

PROBLEMA 46: Si $a + b = 1$. Hallar: $6(a^2 + b^2) - 4(a^3 + b^3)$

A) 1

B) -1

C) 2

D) 3

E) -3

SOLUCIÓN:

Aplicando producto notables.

Trinomio cuadrado perfecto:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$1 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$a^2 + b^2 = 1 - 2ab \quad \dots\dots\dots (1)$$

Además:

$$1 - 3ab = a^2 + b^2 - ab$$

Suma de cubos:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$$

$$a^3 + b^3 = 1 - 3ab \quad \dots\dots\dots (2)$$

Nos piden:

$$M = 6(a^2 + b^2) - 4(a^3 + b^3)$$

Reemplazando (1) y (2):

$$M = 6(1 - 2ab) - 4(1 - 3ab)$$

$$M = 6 - 12ab - 4 + 12ab$$

$$\therefore M = 2$$

CLAVE: C

Radicación

Función Exponencial
Logaritmicación

**Factorización - Fracciones
Algebraicas**

Relaciones - Funciones

**Desigualdades
Inecuaciones**

Sistema de Ecuaciones

Ecuaciones

Matrices - Determinantes

Sucesiones - Series

**Programación Lineal
Gráfica de Relaciones**

**FONDO EDITORIAL
AROD**

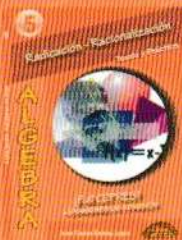
TEMARIO ALGEBRA



Leyes de Exponentes
Ecuaciones Exponenciales



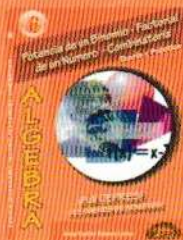
El Polinomio
Productos Notables



Potencia de un Binomio
Factorial de un Número
Combinatoria



División Algebraica
Divisibilidad Algebraica



Números Complejos



Leyes de Exponentes
Ecuaciones Exponenciales